

***Policy for sale :***  
**Politique économique, contrôle électoral et formation endogène des lobbies**

Etienne Farvaque\*

Gaël Lagadec\*\*

Version 24 avril 08

**Résumé:**

Cet article étudie la dynamique des promesses électorales, lorsque les lobbies qui peuvent influencer les politiques mises en oeuvre se créent de façon endogène. Le modèle de Grossman-Helpman (1994) [Grossman G., Helpman E. [1994], "*Protection for sale*", *American Economic Review*, 84, 4, 833-850] est étendu, afin d'introduire la possibilité de sanctions, à la fois en provenance de l'électorat et des lobbies, lorsque le candidat sortant n'a pas rempli les promesses qu'il avait annoncées lors de la précédente campagne.

**Mots clés:** Lobbies, Promesses, Élections, Mensonges, Compétition électorale

**Classification JEL:** D72, P16

---

\* Equippe, Université de Lille 1, Faculté des Sciences Économiques et Sociales, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France; Contact : Etienne.Farvaque@univ-lille1.fr.

\*\* Université de Nouvelle-Calédonie; Contact : lagadec@univ-nc.nc.

# **"Policy for sale": Politique économique, contrôle électoral et formation endogène des lobbies**

## **1. Introduction et survol de la littérature**

La campagne électorale sert-elle à émettre des promesses de politiques économiques futures, ou à flatter les électeurs en leur promettant des politiques économiques qui ne seront pas forcément mises en œuvre? Une autre manière de poser la question serait la suivante: la politique est-elle forcément décevante? La réponse à cette question est évidemment essentielle pour le maintien de démocraties légitimes. En effet, si la politique devait forcément et systématiquement décevoir, alors les tendances à l'abstention qui sont à l'œuvre dans un certain nombre de démocraties devraient se renforcer, jusqu'à laisser la politique définie par une portion congrue d'électeurs, dont le profil serait soit d'être altruistes, soit au contraire appartenir à des groupes de pression ou lobbies, qui seraient alors susceptibles d'influencer réellement les politiques économiques mises en œuvre (à leur plus grand profit, donc).

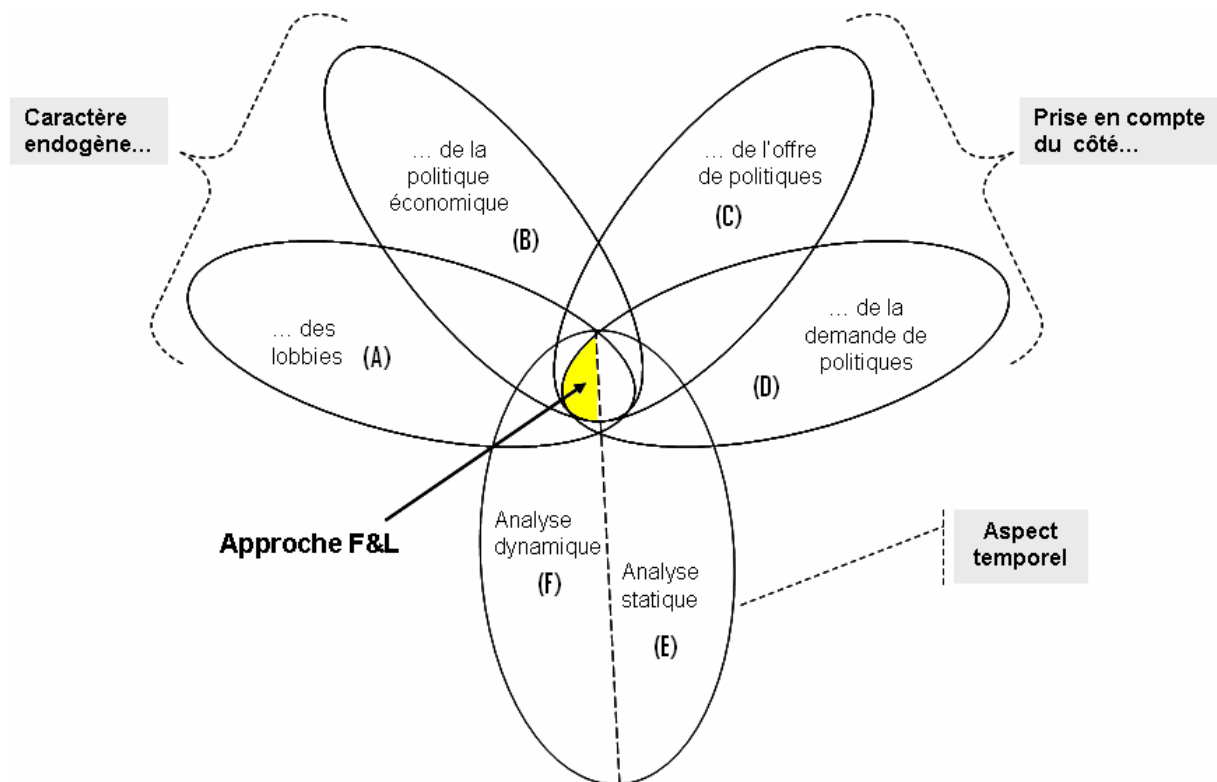
Dans cet article, nous étudions, dans un cadre de concurrence électorale en présence de lobbies endogènes, la dynamique des promesses électorales. Si les mesures de politiques économiques peuvent être influencées par les lobbies, alors il importe d'analyser la dynamique des promesses et des réalisations des élus. En retour, la présence des lobbies sera affectée par la dynamique des promesses, et nous intégrons cette constitution endogène des lobbies dans l'analyse. Notre étude se trouve donc au confluent de plusieurs littératures.

Un critère majeur de caractérisation des approches de politique économique endogène est la prise en compte ou non de l'élection.

Dans de nombreux travaux (dans la lignée de Peltzman 1976 et Hillman et Ursprung 1988) l'élection n'est pas explicitement considérée dans le jeu politique. D'autres travaux (à la suite de Brock et Magee) font de la compétition électorale le cœur du jeu politique.

D'autres critères interviennent pour différencier les principales approches (synthétisés par zones dans le tableau *infra*).

**Figure 1. Positionnement par rapport à la littérature existante**



L'approche actuelle de référence, que l'on nommera l'approche par les contributions, est celle de Grossman et Helpman (1994). Depuis sa publication, ce modèle est en effet devenu la référence des modèles analysant, de façon théorique ou empirique, la protection commerciale endogène. Son succès provient notamment de la clarté de ses prédictions concernant les relations entre protectionnisme et pénétration des importations. Cela facilite les analyses empiriques et a permis de vérifier la pertinence empirique de l'approche, comme l'ont montré par exemple Goldberg et Maggi (1999), Gawande et Bandyopadhyay (2000)<sup>1</sup>, Mitra *et al.* (2002), Eicher et Osang (2002), McCalman (2004), Lopez et Matschke (2006).

Cependant, tant la théorie que la validation empirique de ce modèle ont été récemment critiquées. Le lien entre les contributions reçues des lobbies et les politiques mises en œuvre a été questionné, notamment par Ansolobehere *et al.* (2003), alors que les études empiriques ont été critiquées par Mitra *et al.* (2006) et Kee *et al.* (2007).

[L'approche par les contributions, qui ne considère pas l'élection, est à l'intersection des zones B, C, D et E du graphique n°1.]

<sup>1</sup> Gawande et Bandyopadhyay (2000) démontrent que, conformément aux prédictions du modèle de Grossman et Helpman (1994), la protection américaine est vendue aux lobbies. Ils montrent que les dépenses des lobbies compensent le gouvernement de la perte sèche de la protection et expliquent le faible niveau de la protection américaine comme résultant des préférences du gouvernement (qui pondère également le bien être social et les contributions). Les auteurs montrent également que dans le cas de lobbies concurrents, la compétition augmente les contributions totales et que les dépenses des lobbies dépendent clairement de la puissance de leurs concurrents.

La principale critique adressée à l'approche de Grossman et Helpman (1994) est de faire l'impasse sur le processus électoral, malgré le rôle des lobbies dans ce processus<sup>2</sup>.

Ansola-behere *et al.* (2003) tentent de répondre à une ancienne question attribuée à Tullock (1972) : "pourquoi y-a-t-il si peu d'argent dans la politique américaine?". En considérant initialement que, étant donné la valeur des politiques en jeu, les lobbies devraient contribuer davantage, ils trouvent que leurs contributions ont relativement peu d'impact sur les comportements électoraux.

Ceci pourrait suggérer que les politiques ne sont pas "à vendre". Mais deux autres explications sont en fait possibles. D'une part, les contributions visent particulièrement des politiques spécifiques (comme la protection commerciale pour une industrie), ce qui fait que le ratio "contributions / valeur globale des politiques" ne serait pas pertinent pour l'analyse à mener. Deuxième explication (potentiellement complémentaire) : les lobbies veulent influencer le résultat de l'élection, plutôt que changer la position des hommes politiques, ce qui signifie que l'outil d'analyse le plus pertinent est la compétition électorale, et non l'approche par les contributions.

Une autre limite est le caractère strictement exogène des lobbies.

Alors que dans de nombreux travaux récents, le lobbying est modélisé comme un processus d'enchères ("*menu-auction*"), à travers lequel des lobbies exogènes proposent aux décideurs politiques des plans de contributions (i.e. des promesses fermes de paiements, conditionnées à la politique choisie, *cf.* Bernheim et Winston 1986, Grossman et Helpman 1994), d'autres travaux (moins nombreux) intègrent des lobbies endogènes, mais considèrent alors les politiques comme une simple fonction croissante des contributions reçues (Findlay et Wellisz 1982 notamment<sup>3</sup>). Pour un cadre alternatif avec un lobbying endogène, voir également Felli et Merlo (2002)<sup>4</sup>. [Ces travaux sont à l'intersection des zones A, C, et E du graphique n°1.]

Outre les limites discernées dans le cadre classique de Grossman et Helpman, un défaut répandu dans la littérature paraît aujourd'hui fondamental : le cadre statique de l'analyse politico-économique.

Ainsi, relativement peu de travaux situés dans le champ de la protection endogène introduisent la notion temporelle, ou la dynamique des promesses électorales.

---

<sup>2</sup> Grossman et Helpman eux-mêmes (1994, p. 834) estiment que le modèle de compétition électorale est plus adapté pour l'analyse des grands contours de la politique commerciale, tandis que leur modèle est plus adapté pour une analyse fine (sectorielle) de cette politique.

<sup>3</sup> Findlay et Wellisz (1982) considèrent deux lobbies opposés : l'un est protectionniste et l'autre libre échangiste. Les deux lobbies, qui ont ici un rôle actif (à la différence de l'approche pionnière de Peltzman, 1976), exercent donc des pressions contradictoires. Le tarif est déterminé comme une fonction stable du solde d'efforts (ressources investies dans le processus politique) des deux groupes concurrents. L'approche de Findlay et Wellisz bute sur une impasse mathématique, qui semble rédhibitoire : l'allure des courbes de réaction de chacun des groupes est indéterminée. On ne peut donc savoir si l'équilibre est stable, ni même s'il existe.

<sup>4</sup> Ces auteurs considèrent qu'un gouvernant choisit les lobbies participant au jeu politique. Ainsi, la coalition de lobbies dépend des préférences du gouvernant (qui est supposé choisir des lobbies avec des préférences différentes des siennes, afin de maximiser les contributions reçues).

Cairns (1989), qui reprend l'analyse de Becker (1983), étudie les effets de bien-être comparés de la recherche de rente dans un cadre statique et dynamique. Cependant l'analyse ne traite que le côté des lobbies ; le côté de la demande de politiques économiques (les électeurs) n'est pas considéré, et le côté de l'offre (les hommes politiques) est considéré comme donné. De plus, l'élection n'est pas explicitement considérée (dans ce cas l'électorat n'est pas une variable, et cela justifie donc, à l'intérieur de ce cadre d'analyse, la focalisation du raisonnement sur le rôle des lobbies). [L'analyse de Cairns est à l'intersection des zones B, C, et F du graphique n°1.]

Chez Banks (1990), la prise en compte du temps ne se traduit pas par une analyse intertemporelle, puisque le modèle est un modèle à une période. L'aspect temporel n'est présent qu'en arrière-plan, c'est lui qui justifie le coût du mensonge : l'auteur estime que les électeurs peuvent sanctionner les candidats pour leurs mensonges passés (Banks 1990, p. 310). [L'analyse de Banks est à l'intersection des zones B, C, D et E du graphique n°1.]

Ward (1993) tient compte du temps dans son analyse mais en arrière plan seulement: le temps n'est introduit que pour relier l'aspect fini de la carrière des hommes politiques à la difficulté de la coopération au niveau international (Ward 1993, p. 230). [L'analyse de Ward est à l'intersection des zones C et E du graphique n°1<sup>5</sup>.]

Wirl (1994) pointe les faiblesses de l'analyse statique en affirmant que l'aspect dynamique du lobbying est sa caractéristique la plus fondamentale (Wirl 1994, p. 320). L'auteur, qui tente de répondre à la même question qu'Ansola-behere *et al.* (2003), modélise le lobbying comme la concurrence entre deux groupes (agriculteurs et consommateurs) par rapport au même critère (faveur politique). La principale conclusion de l'analyse est que, dans un cadre dynamique, un lobby limite son effort du fait de la crainte de représailles de la part de l'autre lobby. Cependant l'élection n'est pas prise en compte (on est alors de fait dans un cadre d'analyse dans lequel le lobbying est continu, le modèle peut donc être statique, et est *de facto* proche de celui décrit par Peltzan 1976, en termes de régulation ou de Grossman et Helpman, 1994)<sup>6</sup>. [L'analyse de Wirl est à l'intersection des zones B et E du graphique n°1<sup>7</sup>.]

Le corollaire de l'analyse statique est que les phases du jeu politique sont, en fait, simultanées. Dans un cadre intertemporel, au contraire, rien n'empêche une disjonction entre ces phases. Ainsi, par exemple, le versement de la contribution par le lobby, et l'annonce, puis la mise en œuvre, de la politique par le parti politique, n'ont pas lieu au même moment. Il semble donc nécessaire d'introduire le fait que les phases du jeu sont liées par des engagements entre les joueurs, reposant notamment sur la confiance ou la crédibilité. L'analyse du mensonge en politique devient donc essentielle.

Dans cette perspective, Aragonés *et al.* (2007) montrent que la vision dynamique est la plus pertinente pour analyser le jeu politique. Ils font l'hypothèse que, lorsqu'un candidat ment, les électeurs le sanctionnent en ne croyant plus jamais ses promesses futures. Une telle sanction pour le mensonge politique est assez extrême (comme le reconnaissent les auteurs), ce qui biaise les résultats du modèle. Un tel biais est d'ailleurs récurrent dans la prise en compte du mensonge politique.

---

<sup>5</sup> La politique économique ne peut être considérée comme endogène, car l'analyse de Ward est focalisée sur les seuls aspects environnementaux (mis en balance avec le taux de croissance de l'économie ; Ward 1993, p. 207).

<sup>6</sup> Par ailleurs l'hypothèse selon laquelle les consommateurs s'organisent en lobby (et s'expriment donc indépendamment du cadre électoral) est contradictoire avec ce que nous savons, depuis Olson (1966) notamment, de la difficulté de l'action collective pour les grands groupes (ce point est d'ailleurs accepté par l'auteur : Wirl 1994, p. 308).

<sup>7</sup> L'offre politique n'est pas réellement étudiée, du fait de l'approche plutôt en termes de régulation.

**Deux possibilités sont ici en concurrence.** Selon l'une, les promesses sont contraignantes et la politique est déterminée au moment de la campagne (mensonge nul) ; selon l'autre les promesses sont sans réelle importance et la politique est entièrement déterminée après l'élection (mensonge gratuit). Selon Persson et Tabellini (2000), "il y a une certaine schizophrénie à se contenter de ces deux positions extrêmes, (...) et le défi est de les rapprocher".

Les deux approches ont déjà connu des tentatives de rapprochement. Par exemple, Bennedsen et Feldmann (2006), qui considèrent le lobbying comme une action continue, exercée sans considération pour les échéances électorales. Le modèle proposé dans leur article vise à rapprocher le modèle Grossman et Helpman (1994) de la réalité en intégrant la contrainte de réélection dans la fonction de réaction du gouvernant, afin de considérer que les contributions peuvent évoluer en fonction d'attentes non satisfaites par le gouvernant.

Austen-Smith et Banks (1989) construisent un modèle différent, dans lequel la performance du gouvernant dépend de son effort, une caractéristique commune à notre modèle. Ils montrent ainsi que tant que les électeurs exercent une pression sur le gouvernant pour qu'il tienne ses promesses, celui-ci a une forte incitation à les respecter. Banks (1990) considère également les promesses électorales dans un cadre dynamique, mais sans relier les politiques aux intérêts privés qu'elles sont censées satisfaire (ce qui justifie les contributions). La même limite vaut pour les modèles basés, par exemple, sur les cadres développés par Ferejohn (1986)<sup>8</sup> ou Rogoff (1990), dans lesquels le soutien politique *via* le lobbying n'est pas considéré.

Aragones *et al.* (2007) montrent, dans un modèle à horizon infini, que les politiciens ont un intérêt à tenir leurs promesses, afin de créer une réputation à destination des électeurs, sous peine de représailles par ces derniers. Harrington (1993) étudie aussi les promesses électorales, mais dans un modèle dans lequel les hommes politiques accordent leurs promesses aux anticipations des électeurs, menant à la conclusion que les candidats ont un intérêt à être honnête s'ils veulent avoir une chance de réélection dans la seconde période du modèle.

Dans un article récent, Callander et Wilkie (2007) étendent le modèle de Banks (1990) en mettant le mensonge politique au cœur de l'analyse.

Ils modélisent alors, notamment, les mensonges gratuits comme des cas particuliers de mensonges généralement coûteux

Bien qu'à une période, cette analyse est proche de la notre. Toutefois, alors que nous incorporons le mensonge et ses conséquences dans l'analyse de la politique économique endogène, la problématique de Callander et Wilkie est plus typique de la compétition électorale pure : en quoi la capacité des hommes politiques à mentir affecte leur probabilité d'élection ?

A l'aune de ces champs de littérature, quelles sont les principales caractéristiques de notre approche ?

---

<sup>8</sup> L'analyse de Ferejohn repose notamment sur l'hypothèse de divergence entre les annonces et les actions des hommes politiques (Ferejohn 1986, pp. 29-30).

Premièrement, nous ne considérons pas un électorat homogène, mais incluons les actions des lobbies visant à obtenir des politiques spécifiques favorables à leurs intérêts particuliers. Deuxièmement, notre analyse se focalise sur les conditions dans lesquelles des hommes politiques peuvent renier leurs engagements, exposant ainsi, dans notre cadre<sup>9</sup>, les raisons fondamentales des mensonges politiques ainsi que leur conséquences (réélection, prise en compte du temps).

Troisièmement, nous utilisons un cadre proche des modèles présentant le lobbying comme un processus d'enchères, mais dans notre modèle la formation des lobbies est, au moins en partie, endogène.

Au final, notre modèle est un modèle intertemporel de politique économique endogène, qui considère tant le côté de l'offre que le côté de la demande. Bien que s'appuyant sur l'analyse par les contributions, notre article est également relié à la partie de la littérature qui traite de la compétition électorale et des promesses de campagne.

L'incertitude est introduite comme un élément central du processus. La tromperie et son coût (ni nul ni infini) seront déterminés de façon endogène par le modèle. La figure 1 montre le positionnement d'une telle approche par rapport à la littérature.

L'article est structuré de la façon suivante. La deuxième section présente les hypothèses du modèle. Le modèle est résolu dans la troisième section. La quatrième section discute les résultats du modèle en étudiant les déterminants des politiques mises en œuvre et des divergences entre ces politiques et les engagements préélectoraux. Enfin, la section 5 conclut.

---

<sup>9</sup> Notons ici que notre approche, bien que focalisée sur l'aspect intertemporel et sur les modifications des comportements politiques, n'appartient pas au champ des théories informatives. Cela signifie que nous n'acceptons pas que les contributions puissent augmenter le bien-être social. Browning (1974) considère l'impact bénéfique du lobbying à travers la transmission de l'information. D'autres, comme Baldwin (1982), Laband et Sophocleus (1988), Austen-Smith et Wright (1992), construisent un modèle de lobbying informatif et acceptent que les contributions des lobbies puissent avoir un impact positif sur le bien-être social. Voir également sur ce thème Lagerlöf (2006).

## 2. Hypothèses

Nous considérons deux élections, la première se déroulant en période  $t$ . Chaque période couvre la campagne précédant l'élection, l'élection elle-même et le mandat en découlant<sup>10</sup>. L'élection se joue notamment sur la compétence économique, réelle ou anticipée<sup>11</sup>. La compétence est normée et comprise entre 0 et 1, et elle correspond à la qualité de la réponse aux attentes d'un groupe. Ainsi, si aucune des attentes d'un groupe n'est satisfaite, la compétence de l'élu sera perçue par les membres de ce groupe comme égale à zéro.

La probabilité d'élection dépend, *a priori*, des promesses faites par les candidats et des contributions qu'ils ont reçues. A la période  $t$ , nous supposons que la probabilité d'être élu en  $t$ ,  $P_t$ , ne dépend que des contributions<sup>12</sup>. En effet, l'annonce par le candidat ne correspond pas entièrement à son programme, mais à la connaissance que l'opinion a de ce programme. Ainsi, un candidat dont les contributions reçues sont nulles ne pourra pas faire connaître son programme, alors qu'un candidat ayant reçu un montant quasi-infini de contributions verra sa probabilité d'être élu se rapprocher de l'unité. On a donc :

$$(1) \quad P_t = \frac{C_t}{1 + C_t} \text{ avec } C_t = \lambda \chi y^a$$

où  $\chi$  est la part des secteurs productifs organisés en lobbies,  $\lambda$  un paramètre positif représentant la sensibilité des lobbies aux promesses ( $y^a$ ) faites par le candidat.

A la période suivante ( $t+1$ ), la réélection du candidat sortant dépendra de l'évolution des contributions qu'il saura attirer en soutien à sa candidature, ainsi que de l'évolution du bien-être social. La variation de la probabilité d'élection du sortant s'écrit donc :

$$(2) \quad \dot{P}_{t+1} = (1 - \alpha) \dot{C}_{t+1} + \alpha \dot{W}_{t+1}$$

avec  $\alpha \in [0;1]$ , qui dépend de la proportion de la population travaillant dans des secteurs politiquement organisés (comme chez Grossman et Helpman, 1994).

Les lobbies et groupes de pression modifient leurs contributions en fonction de l'écart entre la compétence effective du candidat dans leur domaine ( $y$ , mesurant la performance des politiques sectorielles mises en œuvre) et l'annonce qui avait été faite de pouvoir satisfaire leurs intérêts ou revendications sectorielles ( $y^a$ ):

$$(3) \quad \dot{C}_{t+1} = \mu(y - y^a)$$

<sup>10</sup> La période  $t+1$  débute donc à la fin du mandat de la période  $t$ , au début de la campagne électorale dans laquelle le gouvernement pourra chercher sa réélection.

<sup>11</sup> Pour autant, le modèle n'est pas un modèle de prévision électorale. Même si la probabilité d'être élu est une fonction croissante des contributions reçues, nous considérons que l'élection elle-même dépend d'autres paramètres (dont certains aléatoires) non formalisés ici.

<sup>12</sup> Cela ne signifie pas toutefois strictement que l'élection en  $t$  ne dépende pas de la population, mais la part de la probabilité d'élection liée à la population à la première période correspond à des paramètres exogènes (préférences de la population, caractéristiques relatives du candidat, aléas).



le paramètre  $\mu$ , positif, étant la sensibilité des lobbies à la tromperie (nous qualifierons ainsi, dans la suite, un écart entre les promesses et les réalisations). Nous considérons un lobby représentatif. Si cette hypothèse peut apparaître forte (avec en conséquence un pouvoir de marché du lobby), elle n'est pas contradictoire avec le cadre retenu (comme ce le serait dans le cadre du lobbying informatif)<sup>13</sup>.

Pour la population, la variation de bien-être ressentie dépend de l'écart entre la compétence qui avait été annoncée par le candidat ( $x^a$ ) et celle effectivement exercée ( $x$ ):

$$(4) \quad \dot{W}_{t+1} = \nu(x - x^a)$$

le paramètre  $\nu$ , positif, étant la sensibilité de l'électorat à la tromperie. Un gouvernant sera donc d'autant plus durement jugé qu'il aura promis beaucoup. Par la suite, on supposera que  $x^a$  est fixé au niveau qui maximise son effet, sans pour autant être égal à 1. En effet, la crédibilité d'une annonce de compétence totale est probablement faible. Pour illustrer notre propos, citons le "contrat avec les Italiens" proposé par Silvio Berlusconi durant la campagne de mai 2001, et par lequel il s'engageait à ne pas se représenter en 2006 s'il n'avait pas rempli quatre au moins de ses cinq principales promesses électorales. Dans les termes de notre analyse, cela annonçait aux électeurs :  $x^a \geq 0,8$ .

Notons également que dans l'optique dynamique  $x^a$  sera variable selon les candidats, les engagements et les prises de position passées influençant la crédibilité des annonces (voir sur ce point Aragonès *et al.* 2007, ou Callander et Wilkie 2007).

La sensibilité des lobbies à la tromperie est plus élevée que celle de l'électorat ( $\mu > \nu$ ), les lobbies étant généralement plus informés (et ayant la plus grande incitation à être informés) que la population pour les enjeux les concernant directement. Ils ont donc une plus grande mémoire et une plus grande capacité de représailles (*cf.* Baron, 1994<sup>14</sup>).

Le deuxième terme de la fonction d'utilité fait intervenir, à partir des équations (2), (3) et (4), le coût du mensonge. Contrairement aux autres (rares) travaux sur les domaines, le coût du mensonge est exprimé tant vis-à-vis de l'électorat que des lobbies (la tromperie vis-à-vis des lobbies est un aspect novateur de notre approche). Le coût du mensonge se traduit par une baisse de la probabilité de réélection ; notre approche évite donc la problématique du tout ou rien dans la sanction électorale du mensonge. Nos hypothèses concernant la réaction des électeurs quand les candidats renient leurs engagements semblent plutôt réalistes<sup>15</sup>.

<sup>13</sup> Pour clarifier ce point, voir par exemple Prat 2002 (pp. 163-164), qui construit un modèle de "publicité informative non directe" à lobbies multiples.

<sup>14</sup> Baron (1994) distingue les électeurs informés et non informés. Les seconds sont, à la différence des premiers, influençable par les dépenses de campagnes. Il est cohérent de considérer que ces deux types d'électeurs coexistent dans l'électorat. En revanche, pour ce qui est des lobbies, les membres sont liés par la défense d'un intérêt individuel commun bien identifié ; en ce qui concerne cet objectif, autour duquel s'articule leurs relations avec les hommes politiques, on ne peut donc considérer que les membres sont non informés ou influençable par le gouvernement.

<sup>15</sup> Cela évite par exemple la faiblesse du modèle de Aragonès *et al.* (2007) qui suppose que la sanction du mensonge politique est de ne plus jamais être cru.

### 3. Résolution

Le candidat va tenter de maximiser à la fois sa probabilité d'élection de première période, et son évolution en seconde période. Sa fonction d'utilité s'écrit donc<sup>16</sup> :

$$(5) \quad U = P_t + \dot{P}_{t+1}$$

qu'il cherchera à maximiser sous les contraintes suivantes :

$$(6a) \quad P_t > \frac{1}{2} + k$$

$$(6b) \quad \dot{C}_{t+1} + \dot{W}_{t+1} \leq \dot{Y}$$

$$(6c) \quad x \leq L(1 - \chi y)$$

La première contrainte est la contrainte primordiale pour le candidat: en effet, pour pouvoir être réélu, il est nécessaire d'être d'abord élu ;  $k \in [0, \frac{1}{2}]$  représente ici la marge de sécurité souhaitée par le candidat (qui témoigne également de sa préférence pour le présent)<sup>17</sup>. La deuxième contrainte est celle des ressources disponibles dans l'économie: *ceteris paribus*, la somme de la croissance des contributions et de celle du bien-être social (exprimé sous forme de surplus) ne peut dépasser la croissance totale de l'économie ( $\dot{Y}$ ). En effet, plus il sera accédé aux revendications des lobbies (dont les contreparties sont les contributions accordées aux candidats), plus on empiètera sur les (autres) possibilités de redistribution offertes par la croissance économique (cf. les DUPs de Bhagwati 1982 : "Directly Unproductive Profit-seeking activities").<sup>18</sup>

La dernière contrainte qui s'impose au candidat est notamment celle du temps qu'il consacre au bien-être des électeurs. L'exercice de sa compétence,  $x$ , par le candidat élu dépend du temps ( $L \in [0;1]$ ) qu'il lui consacre. Cette compétence exercée au profit de l'électorat est toutefois réduite par celle exercée au profit des lobbies et groupes de pression ( $y$ ). Même si on considère que la définition de politiques sectorielles n'est pas coûteuse en temps, car elle ne fait que respecter des engagements pris (voire, au pire, la définition de ces politiques par les lobbies eux-mêmes), il reste que toute concession faite aux lobbies détourne des ressources productives qui auraient pu être employées de façon plus efficace vis-à-vis de l'électorat (prises également ici en compte des DUPs). En fonction de la part  $\chi$  des secteurs productifs organisés en lobbies, l'effort politique sera donc plus ou moins coûteux.

Cette troisième contrainte décrit les divers états possibles du jeu politique:

Si  $L = 0$ , le gouvernant ne se soucie pas du tout de l'électorat :  $x = 0$ .

Si  $L = 1$  et  $y = 0$ , alors la totalité de l'effort est porté vers l'électorat et les DUPs sont absentes :  $x = 1$ .

<sup>16</sup> Pour faciliter la lecture, nous omettons le taux d'actualisation du candidat, sa prise en compte ne livrant que des résultats supplémentaires intuitifs.

<sup>17</sup> L'introduction de cet autre paramètre est toutefois sans effet sur les résultats du modèle, pour faciliter la lecture nous ne le considérons pas dans la suite des calculs.

<sup>18</sup> L'analyse de Laband et Sophocleus (1988) illustre cette contrainte. Les auteurs étudient la perte en bien-être issue de la recherche de rente. Prenant la croissance économique comme critère de bien-être, et le nombre d'avocats en exercice comme *proxy* du lobbying, ils montrent que la recherche de rente a amputé la croissance du PNB américain de 22.6% pour l'année 1985.

Si  $\chi = 0$ , il n'y a pas de lobbies, l'effort vers l'électorat se traduit directement en performance :  $x = L$ .

Si  $L \in ]0,1[$  et  $\chi$  et  $y \in ]0,1[$ , la performance vis-à-vis des électeurs dépend du temps qu'y consacre le gouvernant et des DUPs :  $x \in ]0,1[$ .

Enfin, on peut considérer une situation particulière dans laquelle un lobby représente la totalité de la population, ainsi  $\chi = 1$ . Alors l'effort du politicien n'a pas à se porter sur l'électorat (qui n'existe pas en tant que tel), il n'y a donc pas de force de rappel et  $y$  doit être égal à 1. La contrainte entraîne alors  $x = 0$ .

Sous les hypothèses précédentes, la résolution du modèle présente les solutions suivantes:

$$(7a) \quad x = L \frac{\mu(1-\lambda) + \chi\lambda \left( \nu x^a + \dot{Y} \right)}{\lambda(L\chi\nu - \mu)}$$

$$(7b) \quad y^a = \frac{1}{\chi\lambda}$$

$$(7c) \quad y = \frac{\mu + \chi\lambda \left( \nu(x^a - L) + \dot{Y} \right)}{\chi\lambda(L\chi\lambda - \mu)}$$

A partir de ces expressions, trois premiers résultats intéressants peuvent être déclinés. Ainsi, on vérifie d'abord que l'on a toujours  $y > x$ . Autrement dit, les intérêts des lobbies sont toujours mieux servis que ceux de la population considérée dans son intégralité. Au-delà des conditions traditionnelles d'efficacité des lobbies (petite taille, concentration, spécificité des facteurs, *etc.*), ce résultat justifie la rationalité de l'organisation en lobby : à quoi servirait l'action collective si elle ne permettait pas d'être avantagée par rapport au reste de la population ?

D'autre part, le modèle vérifie la condition olsonienne relative à l'organisation des groupes de pression (*cf.* Olson, 1966): il existe un seuil,  $\tilde{\chi}$ , pour la taille du lobby (représentée par la proportion de la population appartenant au groupe), tel que, en deçà du seuil, lorsque la taille des lobbies augmente, l'effort du candidat en leur faveur augmente<sup>19</sup>. Dans ce cas la condition de petite taille est remplie et permet donc aux lobbies d'être efficaces<sup>20</sup>. Quand leur taille augmente le candidat s'en préoccupe davantage (en fonction du "poids" économique représenté).

<sup>19</sup> Cela signifie que la condition olsonienne, plutôt qu'un postulat traditionnel, est ici endogène au modèle.

<sup>20</sup> La petite taille est la principale condition microéconomique à la constitution d'un lobby. Dans l'ensemble de la littérature relative au lobbying, un quasi consensus s'est établi autour de ce point. C'est ce qui permet à Wellisz et Wilson (1986, p. 367, p. 372) d'écrire qu'un groupe peut atteindre ses objectifs même s'il ne possède aucun autre avantage que sa petite taille ; pour un raisonnement similaire voir aussi Becker (1983, p. 385 et p. 395). A partir d'une perspective essentiellement macroéconomique, Olson (1982) considère que les sociétés stables avec circonscriptions inchangées tendent à générer plus d'organisations destinées à l'action collective. Une étude récente de Coates, Heckelman et Wilson (2007) confirme la vision d'Olson : le développement socioéconomique et la stabilité d'une nation (appréciée à travers des proxys tels que la durée depuis le décollage initial, depuis le dernier bouleversement institutionnel, depuis le dernier violent soulèvement populaire) sont des facteurs clé d'explication de la formation des lobbies.

Ce seuil, bien qu'exprimé différemment, et émergeant différemment, se retrouve également chez Magee (2002). C'est en ce sens qu'on parlera de formation partiellement endogène des lobbies.<sup>21</sup>

Inversement, au-delà du seuil, les lobbies sont trop importants, et ils perdent leurs caractéristiques. Dans ce cas, le soutien politique s'exprimera de la même manière que pour l'électorat dans son ensemble<sup>22</sup>.

Enfin, il apparaît, logiquement, que lorsque la quantité de travail du candidat augmente, la politique mise en œuvre est d'abord tournée vers le bien-être de la population, tout supplément de travail s'effectuant au détriment des lobbies et groupes de pression (on a, respectivement :

$\frac{\partial x}{\partial L} > 0 ; \frac{\partial y}{\partial L} < 0$ ). Ce point illustre clairement l'antagonisme entre les lobbies et la population qui est également l'opposition entre intérêts privés et intérêt général.

#### **4. La dynamique des promesses électorales**

Ainsi qu'il a été défini plus haut, le terme de tromperie désigne l'écart entre les promesses du candidat et ses réalisations, tant envers la population dans son ensemble qu'envers les lobbies. Dans cette partie, nous montrons à quelles conditions les candidats aux élections peuvent sans trop de conséquences électorales faire des promesses sans remplir, une fois élus, les contrats offerts aux électeurs et soutiens politiques durant la campagne. Nous analysons d'abord la réaction des agents aux promesses, puis aux politiques effectivement mises en œuvre, enfin par rapport à l'écart entre les deux.

---

<sup>21</sup> Magee présente un modèle de politique commerciale et de formation des lobbies endogènes, centré sur les interactions entre un gouvernant et un lobby unique. Le coût pour un membre du groupe de se comporter en passager clandestin est supposé être un retour illimité à la solution non coopérative. Dans ce cadre, il est montré qu'augmenter le nombre des membres génère un problème de comportement de passager clandestin uniquement quand le nombre d'entreprises dans le groupe, déterminé de façon endogène est suffisamment important (Magee 2002, p. 457 and p. 467).

<sup>22</sup> Le lobby n'étant plus efficace dans son activité de *rent seeking*, le soutien politique de ses membres s'exprime par le vote (comme les groupes de grande taille tels que les syndicats ou les associations de consommateurs).

Dans un premier temps, observons la sensibilité des politiques menées par rapport aux promesses faites aux électeurs. D'après (7a), on obtient :  $\frac{\partial x}{\partial x^a} < 0$ . Les politiques menées vis-à-vis de la population sont donc d'autant plus faibles que les promesses auront été importantes. Ce résultat *a priori* paradoxal est important. Son explication provient de la disjonction temporelle entre promesses et réalisations que notre modèle permet de mettre en évidence. En effet, plus les promesses sont élevées, moins elles sont atteignables. Plutôt que d'essayer de minorer l'écart par la suite, il devient moins coûteux pour le décideur politique de rechercher du soutien politique du côté des lobbies (on vérifie d'ailleurs que  $\frac{\partial y}{\partial x^a} > 0$ ). Cette situation est notamment liée à l'hypothèse (réaliste) de la moindre sensibilité des électeurs à la tromperie ( $\mu > \nu$ , cf. Baron, 1994). Ce résultat est confirmé par le fait que les lobbies tendent à bénéficier d'une augmentation des ressources disponibles, par rapport aux électeurs ( $\frac{\partial y}{\partial \dot{Y}} > 0$  et  $\frac{\partial x}{\partial \dot{Y}} < 0$ ).

Les engagements vis-à-vis des lobbies sont endogènes, on ne peut donc pratiquer la même analyse que pour les promesses faites aux électeurs. On peut toutefois étudier l'impact sur les politiques mises en œuvre de la sensibilité des lobbies aux annonces. On montre que  $\frac{\partial y}{\partial \lambda} < 0$ , qui s'interprète de la façon suivante : quand la sensibilité des lobbies aux annonces augmentent, à contributions égales, les annonces peuvent diminuer ; de là, à tromperie constante, les politiques sectorielles mises en œuvre diminuent.  $\frac{\partial x}{\partial \lambda} > 0$  témoigne ici aussi de l'antagonisme entre les lobbies et la population.

Dans un deuxième temps, il convient d'analyser l'impact de la sensibilité à la tromperie sur les politiques menées vis-à-vis de chacun des deux types d'agents avec lesquels les candidats sont en relation (i.e. les lobbies et la population). D'après les résultats précédents, on montre que, à condition que  $\chi$  soit relativement faible, on aura  $\frac{\partial y}{\partial \mu} > 0$ . En d'autres termes, si les lobbies vérifient la condition olsonienne d'efficacité politique (cf. *supra*), alors les candidats auront d'autant plus tendance à chercher à les satisfaire que les lobbies seront sensibles à l'écart entre annonces et efforts réellement fournis. Des lobbies relativement petits seront donc d'autant plus enclins à contribuer à l'effort de campagne des candidats (ce qui est une déclinaison supplémentaire de la condition d'efficacité liée à la petite taille).

D'autre part, sauf si le travail fourni par les candidats est proche de zéro, la compétence exercée par les candidats une fois élus réagira positivement à la sensibilité de l'électorat aux promesses non tenues (on a en effet :  $\frac{\partial x}{\partial \nu} > 0$  pour  $L$  différent de zéro<sup>23</sup>).

---

<sup>23</sup> Plus précisément (cf. annexes) pour  $L > \bar{L}$ , avec  $\bar{L} = \frac{w}{1 - \chi w(1 + A^2)}$ , et  $1 + A^2 = \frac{y}{x}$ .

En revanche, on a :  $\frac{\partial x}{\partial v} \leq 0$  quand  $L$  tend vers zéro. Ce résultat se comprend intuitivement si l'on raisonne *a contrario*: imaginons que le gouvernement travaille très peu pour la population, alors les caractéristiques de la population n'interfèrent pas avec les décisions qu'il prend (dans les termes du modèle: avec la compétence qu'il exerce) une fois au pouvoir. En corollaire, étant donnée la contrainte (6c), on remarque que si le gouvernement favorise fortement les lobbies par rapport à la population, alors il est probable que la compétence exercée le soit sans égard aucun pour la population.

Considérons enfin les résultats du modèle quant aux tromperies subies par les agents. La tromperie vis-à-vis des agents s'écrit donc comme l'écart entre ce qui leur avait été promis et ce qui est mis en œuvre ; pour les électeurs et pour les lobbies  $\tilde{T} \equiv y^a - y$ . D'expérience, on sait que les tromperies vis-à-vis de l'électorat sont des valeurs positives, dans ce contexte on peut montrer (cf. annexes) qu'il serait incohérent qu'il n'en soit pas de même vis-à-vis des lobbies. L'analyse sera effectuée à partir des élasticités, ce qui permet de comparer des variations, et rend les résultats plus directement interprétables.

On remarque d'abord que  $\frac{\partial T}{\partial L} \cdot \frac{L}{T} < 0$  uniquement si  $L > \bar{L}$ <sup>24</sup>, ce qui signifie, à la façon de  $\frac{\partial x}{\partial v} > 0$  que la relation entre hausse du travail et baisse de la tromperie ne vaut que si le gouvernement se préoccupe réellement de la population.

On remarque ensuite que  $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \chi} \cdot \frac{\chi}{\tilde{T}} > 0$ . La tromperie vis-à-vis des lobbies a donc tendance à augmenter lorsque leur efficacité politique diminue (voir la condition relative à la condition olsonienne ci-dessus). Plus ceux-ci représentent une part importante de l'économie, moins leur efficacité est grande. D'autre part, on constate que plus les lobbies sont sensibles aux annonces, et plus les décideurs auront tendance à les tromper ( $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \lambda} > 0$ ), de façon à engranger le maximum de contributions de la part de soutiens politiques relativement peu rétifs.

Un deuxième résultat intéressant sur ce point est que, lorsque la sensibilité des lobbies à la tromperie augmente, ils ont tendance à être moins trompés ( $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu}{\tilde{T}} < 0$ )<sup>25</sup>. Notons que les deux résultats ne sont pas contradictoires, et sont plutôt complémentaires, la sensibilité des lobbies à la tromperie pouvant venir contrebalancer leur sensibilité aux annonces.

---

<sup>24</sup> *Idem.*

<sup>25</sup> Notons que la sensibilité des lobbies à la tromperie n'a pas d'impact sur la tromperie vis-à-vis des électeurs ( $\frac{\partial T}{\partial \mu} \cdot \frac{\mu}{T} = 0$ ), ce qui maintient des marges de manœuvre pour le décideur. C'est de fait le contraire pour la population, par rapport à qui la tromperie diminue lorsque sa sensibilité à la tromperie augmente. L'explication est la suivante: quand le candidat est contraint par une population plus sensible à la tromperie, ce qui limite les promesses les plus "irréalisables", il se dégage des marges de manœuvre du côté des lobbies, ce qui lui permet de recevoir un surcroît de contributions.

Concernant la sensibilité des électeurs à la tromperie,  $\frac{\partial T}{\partial \nu} \cdot \frac{\nu}{T} < 0$  pour  $L > \bar{L}$ , ce qui signifie que quand le gouvernant travaille au moins un minimum pour la population il la trompe moins quand elle devient plus sensible aux tromperies (la force de rappel ne vaut donc que si le gouvernant ne s'appuie pas entièrement sur les lobbies). Pour les lobbies, la condition de signe de  $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \nu} \cdot \frac{\nu}{\tilde{T}}$  est exactement l'opposé de la précédente (donc quand on doit tromper moins la population, se sont mécaniquement les lobbies qui en font les frais).

De façon logique, on trouve également que plus les annonces ( $w$ ) sont élevées et plus la population est trompée (plus on promet, moins on tient).

Un dernier résultat concerne la ressource. On démontre que  $\frac{\partial T}{\partial \dot{Y}} \cdot \frac{\dot{Y}}{T} > 0$  et  $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \dot{Y}} \cdot \frac{\dot{Y}}{\tilde{T}} < 0$  qui s'interprète ainsi : quand la croissance s'améliore on trompe davantage la population et moins les lobbies. Les lobbies sont donc les gagnants de la croissance ; vis-à-vis de la ressource, on retrouve donc clairement l'antagonisme entre l'intérêt général et les intérêts privés.

## 5. Conclusion

Cet article propose un cadre d'analyse de la dynamique des promesses électorales, mettant l'accent sur les tromperies vis-à-vis de l'électorat et des groupes de pression (ou lobbies). Cette double tromperie est un aspect novateur dans la littérature sur le lobbying. Les politiques globale et sectorielle (pour la population et pour le lobby) maximisent la fonction objectif du politicien pour des niveaux différents. A l'équilibre, la politique pour le lobby sera toujours plus favorable que la politique pour la population. Le lobby apparaît donc comme le gagnant du jeu politique.

Ce résultat général ne doit pas masquer les nuances que le modèle à deux périodes apporte à une vision plus traditionnelle des interactions politico-économiques propres à l'endogénéité de la politique économique.

Le modèle présenté offre une vision complémentaire de la condition olsonienne. Selon cette condition l'efficacité politique d'un lobby est inversement proportionnelle à sa taille. Cette condition, quasi unanimement acceptée dans la littérature, fait de la petite taille la principale condition à la constitution d'un lobby.

Dans le modèle, le lobby est caractérisé par la proportion de population totale qu'il représente. Donc, quand cette proportion augmente le lobby perd en efficacité. Mais cela n'est vrai que tant que le lobby a les caractéristiques fondamentales d'un lobby, c'est-à-dire tant que cette proportion est faible. Ainsi, à partir d'un certain niveau le groupe considéré n'agit plus comme un lobby ; sa force politique se manifeste autrement (votes, sondages, c'est-à-dire comme le reste de la population<sup>26</sup>).

---

<sup>26</sup> Par exemple si on considère que le lobby représente la quasi totalité de la population, son influence sera considérée sous angle uniquement électoral.

En conséquence, le gouvernant ne tiendra compte des caractéristiques du lobby que si la condition d'efficacité politique est remplie. Ainsi la politique en faveur du lobby dépendra positivement de sa sensibilité à la tromperie uniquement si le groupe est inférieur à une certaine taille (on retrouve ici la différence entre groupe d'intérêt potentiel et lobby actif, qui fonde aussi la nature endogène du lobbying dans le modèle).

Au niveau de l'électorat les caractéristiques sont stables. Mais le préalable à la prise en compte de ces caractéristiques par le gouvernant nécessite un minimum d'intérêt pour l'électorat (qui se traduit par un niveau d'effort minimal en faveur de la population). C'est à partir de ce seuil d'effort que notamment la sensibilité de l'électorat à la tromperie sera considérée. Ainsi, au-delà de ce seuil une hausse de la sensibilité à la tromperie améliore la politique mise en œuvre pour la population, et à la même condition cette condition dépend positivement du temps que le gouvernant consacre à la population.

La sensibilité aux annonces met clairement en relief les intérêts antagonistes du lobby et de la population. Ainsi, plus les contributions du lobby sont sensibles aux annonces et plus on le trompe (et moins on trompe la population) et plus on annonce à la population une politique favorable et plus on la trompe (et moins on trompe le lobby) : plus on promet, moins on tient. Mais l'analyse met aussi en évidence les conditions sous lesquelles les tromperies peuvent s'exercer. Dès lors, il est montré que des promesses réellement utopiques ne sont pas payantes. En effet, dans le cadre du modèle, la sensibilité des lobbies à la tromperie contrebalance leur sensibilité aux annonces, créant une force de rappel pour le décideur.

L'antagonisme se révèle surtout concernant la ressource. Quand la croissance de la richesse globale augmente la politique pour la population se dégrade tandis que l'action en faveur des lobbies s'améliore. Plus on a de ressources et plus la redistribution profite au lobby.

Il en est de même pour les tromperies : quand la richesse globale augmente la tromperie vis-à-vis de l'électorat augmente et la tromperie vis-à-vis du lobby diminue. Ce résultat doit être relié au fait que la croissance économique (évaluée sous différentes formes) est une des principales variables de soutien politique<sup>27</sup>. Ainsi, plus la croissance s'améliorera et plus le gouvernant aura de chances d'être reconduit à son poste ; cette reconduction s'accompagnant donc d'une proximité croissante, au fil des cycles électoraux, avec les lobbies (plus de faveurs, moins de tromperie). Il est alors logique que les lobbies préfèrent que le gouvernant demeure à sa fonction. Le lobby influençant la probabilité d'élection cela peut expliquer notamment pourquoi les gouvernants reçoivent en moyenne plus de contributions que les opposants. Cette différence de contributions est démontrée par Stratmann qui pratique des tests sur les élections au Congrès américain, (Stratmann 1995, p. 132). Cette démonstration est problématique car contradictoire avec l'approche de la "compétition électorale" puisqu'elle implique que les gouvernants modifient leurs positions pour les rapprocher de celles de leurs contributeurs (Mueller et Stratmann 1994, p. 65). Notre analyse montre comment se "rapprochement" est en réalité lui même endogène.

---

<sup>27</sup> Voir sur ce point, notamment : Stigler (1973), qui, pratiquant des tests sur les élections au Congrès américain, identifie la variable déterminante de la réélection comme la variation du revenu par tête ; Frey (1978), qui testant des fonctions de popularité sur trois pays (Etats-Unis, Royaume-Uni, Allemagne) isole trois variables significatives de soutien politique : la variation de la croissance du revenu disponible, le chômage et le taux d'inflation ; Chappell Jr (1990), qui analysant conjointement les votes et les taux d'approbation pour les présidents américains, conclut que, tant les électeurs que les sondés évaluent la performance économique à travers l'inflation, le chômage (faiblement) et la croissance économique.



Une piste de recherche prometteuse semble être de distinguer deux groupes d'électeurs (informés et non informés) et d'endogénéiser leurs parts respectives en fonction des tromperies (un électeur trompé étant alors enclin à être plus informé) pour les futures élections et à analyser les conséquences sur les valeurs d'équilibre du modèle.

## Références

- Aragonès E., Palfrey Th., Postlewaite A., 2007, "Political reputations and electoral promises", *Journal of the European Economic Association*, 5, 846-884
- Ansolabehere S., de Figueiredo J. M., Snyder Jr J. M., 2003, "Why is There so Little Money in US Politics", *Journal of Economic Perspectives*, vol. 17, n°1, winter, 105-130
- Austen-Smith D., Banks J. S., 1989, "Electoral accountability and incumbency", in *Models of strategic choice in politics*, Peter Ordershook (eds.), University of Michigan Press
- Austen-Smith D., Wright J. R., 1992, "Competitive Lobbying for a Legislator's Vote", *Social Choice and Welfare*, 9, 229-257
- Banks J. S., 1990, "A Model of Electoral Competition With Incomplete Information", *Journal of Economic Theory*, 50, 309-325
- Baron. D. P., 1994, "Electoral Competition With Informed and Uninformed Voters", *American Political Science Review*, 88, 1, 33-47
- Becker G. S., 1983, "A Theory of Competition Among Pressure Groups for Political Influence", *Quarterly Journal of Economics*, XCVIII, 3, august, 371-400
- Bennedsen M., Feldmann S. E., 2006, "Informational lobbying and political contributions", *Journal of Public Economics*, 90, 631-656
- Bhagwati J. N., 1982, "Directly Unproductive, Profit-seeking (DUP) Activities", *Journal of Political Economy*, 90, 5, 988-1002
- Baldwin R. E., 1982, "The Political Economy of Protectionism", in BHAGWATI, *Import Competition and Response*, University of Chicago Press, 263-292
- Bernheim B., Whinston M., 1986, "Menu auction, ressource allocation and economic influence", *Quarterly Journal of Economics*, 101, 1-31
- Browning E. K., 1974, "On the Welfare Cost of Transfers", *Kyklos*, 27, 374-377
- Callander S., Wilkie S., 2007, "Lies, damned lies, and political campaign", *Games and Economic Behavior*, vol. 60, 262-286
- Coates D., Heckleman J. C., Wilson B., 2007, "Determinants on interest group formation", *Public Choice*, 133, 377-391
- Eicher T., Osang T., 2002, "Protection for sale: an empirical estimation: comment", *American Economic Review*, 92, 1702-1710
- Felli L., Merlo A., 2002, "Endogenous lobbying", CEPR Discussion Paper n°3174, 30 p
- Ferejohn J., 1986, "Incumbent Performance and Electoral Control", *Public Choice*, 50, 5-26
- Findlay R., Wellisz S., 1982, "Endogenous tariffs, the Political Economy of Trade Restrictions, and Welfare", in Bhagwati, *Import Competition and Response*, University of Chicago Press, 223-234
- Gawande K., Bandyopadhyay U., 2000, "Is protection for sale ? Evidence of the Grossman – Helpman theory of endogenous protection", *Review of Economics and Statistics*, 82, 139-152

- Goldberg P., Maggi G., 1999, "Protection for sale: an empirical investigation", *American Economic Review*, 89, 1135-1155
- Grossman G., Helpman E., 1994, "Protection for sale", *American Economic Review*, 84, 4, 833-850
- Harrington J. E., 1993, "The impact of reelection pressures on the fulfillment of campaign promises", *Games and Economic Behavior*, 5, 71-97
- Kee H. L., Olarreaga M., Silva P., 2007, "Market Access for Sale", *Journal of Development Economics*, 82, 79-94
- Laband D. N., Sophocleus J. P., 1988, "The Social Cost of Rent-Seeking : First Estimates", *Public Choice*, 58, 269-275
- Lagerlöf J. N. M., 2006, "A theory of Rent Seeking with Informational Foundations", Discussion Paper Series, CEPR n° 5893, 24 p.
- Magee C., 2002, "Endogenous trade policy and lobby formation : an application to the free-rider problem", *Journal of International Economics*, 57, 449-471
- Lopez R. A., Matschke X., 2006, "Food protection for sale", *Review of International Economics*, 14, 3, 380-391
- McCalman P., 2004, "Protection for sale and trade liberalization: an empirical investigation", *Review of International Economics*, 12, 81-94
- Mitra D., Thomakos D., Ulubasoglu M., 2002, "Protection for sale in a developing country: democracy versus dictatorship", *Review of economics and Statistics*, 84, 497-508
- Mitra D., Thomakos D., Ulubasoglu M., 2006, "Can we obtain realistic parameter estimates for the 'protection for sale' model?", *Canadian Journal of Economics*, 39, 187-210
- Mueller D. C., Stratmann T., 1994, "Informative and Persuasive Campaigning", *Public Choice*, 81, October, 55-78
- Olson M., 1966, *The Logic of Collective Action*, Harvard University Press (traduction française : *Logique de l'action collective*, 1978, Presses Universitaires de France, 199 p.)
- Olson M., 1982, *The rise and decline of nations : Economic growth, stagflation, and social rigidities*, Yale University Press (New Haven), 273 p.
- Peltzman S., 1976, "Toward a More General Theory of Regulation", *The Journal of Law and Economics*, 211-248
- Persson T., Tabellini G., 2000, *Political Economics : explaining economic policy*, MIT Press
- Rogoff K., 1990, "Equilibrium Political Budget Cycles", *American Economic Review*, 80, 21-36
- Stratmann T., 1995, "Campaign Contributions and Congressional Voting : Does the Timing of Contributions Matter ?", *The Review of Economics and Statistics*, LXXVII, 1, February, 127-136
- Tullock G., 1972, "The purchase of Politicians", *Western Economic Journal*, 10, 354-55
- Wellisz S., Wilson J. D., 1986, "Lobbying and Tariff Formation : A Deadweight Loss Consideration", *Journal of International Economics*, 20, 367-375
- Wirl F., 1994, "The dynamics of lobbying - A differential game", *Public Choice*, 80, 307-323

## **Annexes mathématiques**

(détail des calcul et vérifications d'existence de l'équilibre)

# 1 L'équilibre du politicien

$$\begin{aligned}\Phi &= \chi\lambda z + (1 - \alpha)\mu(y - z) + \alpha\nu(x - w) + A\left(\frac{\chi\lambda z}{1 + \chi\lambda z} - \frac{1}{2}\right) + \\ &\quad B(\mu(y - z) + \nu(x - w) - Y) + C\left(\frac{x}{1 - \chi y} - L\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dx} &= \frac{-\alpha\nu + \alpha\nu\chi y - B\nu + B\nu\chi y - C}{-1 + \chi y} \\ \frac{d\Phi}{dy} &= -\frac{-\mu + 2\mu\chi y - \mu\chi^2 y^2 + \mu\alpha - 2\mu\alpha\chi y + \mu\alpha\chi^2 y^2}{(-1 + \chi y)^2} + \\ &\quad \frac{-B\mu + 2B\mu\chi y - B\mu\chi^2 y^2 - Cx\chi}{(-1 + \chi y)^2} \\ \frac{d\Phi}{dz} &= \frac{\chi\lambda + 2\chi^2\lambda^2 z + \chi^3\lambda^3 z^2 - \mu - 2\mu\chi\lambda z - \mu\chi^2\lambda^2 z^2}{(1 + \chi\lambda z)^2} + \\ &\quad \frac{\mu\alpha + 2\mu\alpha\chi\lambda z + \mu\alpha\chi^2\lambda^2 z^2 + A\chi\lambda - B\mu - 2B\mu\chi\lambda z - B\mu\chi^2\lambda^2 z^2}{(1 + \chi\lambda z)^2} \\ \frac{d\Phi}{dA} &= \frac{1}{2} \frac{\chi\lambda z - 1}{1 + \chi\lambda z} \\ \frac{d\Phi}{dB} &= \mu y - \mu z + \nu x - \nu w - Y \\ \frac{d\Phi}{dC} &= -\frac{x - L + L\chi y}{-1 + \chi y}\end{aligned}$$

$$\text{Avec } \frac{d\Phi}{dx} = \frac{d\Phi}{dy} = \frac{d\Phi}{dz} = \frac{d\Phi}{dA} = \frac{d\Phi}{dB} = \frac{d\Phi}{dC} = 0.$$

La résolution du système donne :

$$\begin{aligned}x &= L \frac{-\lambda\mu + \mu + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)}, \\ y &= -\frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\chi\lambda(L\chi\nu - \mu)}, \\ z &= \frac{1}{\chi\lambda}, \\ A &= -4 \frac{\nu L\chi\lambda - \lambda\mu - \mu L\nu + 2\mu\alpha L\nu}{\lambda(L\chi\nu - \mu)}, \\ B &= -\frac{L\chi\alpha\nu - \mu + \mu\alpha}{L\chi\nu - \mu}, \\ C &= \nu\mu \frac{-\mu + 2\mu\alpha + 2\alpha\nu w\chi\lambda + 2\alpha Y\chi\lambda - \nu w\chi\lambda - Y\chi\lambda + \lambda\mu - 2\alpha\lambda\mu}{(L\chi\nu - \mu)^2\lambda}\end{aligned}$$

## 1.1 Statique comparative

### 1.1.1 Comparaison de $x$ et $y$

On calcule  $\frac{x}{y} - 1 < 0$ .

$$\frac{L \frac{-\lambda\mu + \mu + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)}}{-\frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\chi\lambda(L\chi\nu - \mu)}} - 1 = \frac{-L\chi\lambda\mu + L\chi\mu + L\chi^2\nu w\lambda + L\chi^2Y\lambda + \mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{-\mu + \nu L\chi\lambda - \nu w\chi\lambda - Y\chi\lambda}.$$

Si le dénominateur est positif, alors  $-\mu + \nu L\chi\lambda - \nu w\chi\lambda - Y\chi\lambda - A^2 = 0$ . Dans ce cas  $Y = \frac{-\mu + \nu L\chi\lambda - \nu w\chi\lambda - A^2}{\chi\lambda}$ , qui entraîne numérateur =  $-L\chi\lambda\mu + \nu L^2\chi^2\lambda - A^2L\chi - A^2 < 0$ , qui signifie que  $\frac{x}{y} - 1 < 0$  et donc que  $y > x$ .

### 1.1.2 Egalités simplificatrices

A partir de  $y > x$ , on peut écrire :  $\frac{y}{x} - 1 > 0$ , ou  $\frac{y}{x} - 1 - A^2 = 0$ , qui se réécrit :

$$\frac{-\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda - L\chi\lambda\mu + L\chi\mu + L\chi^2\nu w\lambda + L\chi^2Y\lambda - A^2L\chi\lambda\mu + A^2L\chi\mu + A^2L\chi^2\nu w\lambda + A^2L\chi^2Y\lambda}{L(-\lambda\mu + \mu + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda)\chi} = 0$$

Cette égalité permet de déterminer les relations suivantes :

$$\begin{cases} Y = -\frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda - L\chi\lambda\mu + L\chi\mu + L\chi^2\nu w\lambda - A^2L\chi\lambda\mu + A^2L\chi\mu + A^2L\chi^2\nu w\lambda}{\chi\lambda(1 + L\chi + A^2L\chi)}; \\ \mu = \chi\lambda \frac{-\nu L + \nu w + Y + L\chi\nu w + L\chi Y + A^2L\chi\nu w + A^2L\chi Y}{-1 + \chi\lambda L - L\chi + A^2L\chi\lambda - A^2L\chi}; \\ \nu = -\frac{\mu + L\chi\mu + Y\chi\lambda - L\chi\lambda\mu + A^2L\chi\mu + L\chi^2Y\lambda - A^2L\chi\lambda\mu + A^2L\chi^2Y\lambda}{\chi\lambda(-L + w + L\chi w + A^2L\chi w)}; \\ \lambda = -\mu \frac{1 + L\chi + A^2L\chi}{\chi(-\nu L + \nu w + Y - L\mu + L\chi\nu w + L\chi Y - A^2L\mu + A^2L\chi\nu w + A^2L\chi Y)} \end{cases}$$

### 1.1.3 L'interprétation de la condition olsonienne

$$* \frac{dy}{d\chi} = \frac{-\nu^2 L^2 \chi^2 \lambda + \nu^2 w \chi^2 \lambda L + Y \chi^2 \lambda L \nu + 2\mu L \chi \nu - \mu^2}{\chi^2 \lambda (L \chi \nu - \mu)^2}$$

Le signe de  $\frac{dy}{d\chi}$  dépend du signe de  $-\nu^2 L^2 \chi^2 \lambda + \nu^2 w \chi^2 \lambda L + Y \chi^2 \lambda L \nu + 2\mu L \chi \nu - \mu^2$ .

$$\frac{dy}{d\chi} = 0 \text{ pour } \chi = \tilde{\chi}.$$

$$\tilde{\chi} = \frac{1}{2(-\nu^2 w \lambda L - Y \lambda L \nu + \nu^2 L^2 \lambda)} \left( 2L\nu + 2\sqrt{(\nu^2 L^2 + \nu^2 w \lambda L + Y \lambda L \nu - \nu^2 L^2 \lambda)} \right) \mu$$

$$= \left( L\nu + \sqrt{(\nu^2 L^2 + \nu^2 w \lambda L + Y \lambda L \nu - \nu^2 L^2 \lambda)} \right) \frac{\mu}{L\nu\lambda(-\nu w - Y + L\nu)}.$$

$$\text{Soit } \hat{\chi} + \varepsilon = \left( L\nu + \sqrt{(\nu^2 L^2 + \nu^2 w \lambda L + Y \lambda L \nu - \nu^2 L^2 \lambda + 1)} \right) \frac{\mu}{L\nu\lambda(-\nu w - Y + L\nu)}$$

Si on remplace  $\chi$  par  $\hat{\chi} + \varepsilon$ , c'est-à-dire par :

$$\left( L\nu + \sqrt{(\nu^2 L^2 + \nu^2 w \lambda L + Y \lambda L \nu - \nu^2 L^2 \lambda + 1)} \right) \frac{\mu}{L\nu\lambda(-\nu w - Y + L\nu)},$$

on obtient  $-\nu^2 L^2 \chi^2 \lambda + \nu^2 w \chi^2 \lambda L + Y \chi^2 \lambda L \nu + 2\mu L \chi \nu - \mu^2 = -\frac{\mu^2}{L\nu\lambda(-\nu w - Y + L\nu)}$ .  
Donc  $\chi > \tilde{\chi} \rightarrow \frac{dy}{d\chi} > 0$  et  $\chi < \tilde{\chi} \rightarrow \frac{dy}{d\chi} < 0$  seulement si  $L < \frac{\nu w + Y}{\nu}$ .

La seconde inégalité correspond à la condition olsonienne. Cette condition n'est pas générale car à partir de  $\chi > \tilde{\chi}$ , le lobby représente une part suffisamment importante de la population, qui fait qu'il perd les caractéristiques d'un lobby.

Cela ne vaut que si  $L$  est inférieur à un certain niveau. Dans le cas contraire les effets s'opposent : le lobby représente une force électorale qui fait que quand sa taille s'accroît la politique en sa faveur tend à s'améliorer, mais le gouvernant travaille beaucoup pour l'autre groupe (la population).

## 1.2 Les valeurs d'équilibre

On étudie l'influence des paramètres du modèle sur les valeurs d'équilibre.

### 1.2.1 L'effort du politicien

$$* \frac{dx}{dL} = -(Y\chi\lambda - \lambda\mu + \nu w\chi\lambda + \mu) \frac{\mu}{\lambda(L\chi\nu - \mu)^2}$$

$$* \frac{dy}{dL} = \nu \frac{Y\chi\lambda - \lambda\mu + \nu w\chi\lambda + \mu}{\lambda(L\chi\nu - \mu)^2}$$

A partir de  $\lambda = -\mu \frac{1+L\chi+A^2L\chi}{\chi(-\nu L+\nu w+Y-L\mu+L\chi\nu w+L\chi Y-A^2L\mu+A^2L\chi\nu w+A^2L\chi Y)}$ , on réécrit :

$$\frac{dx}{dL} = -\frac{\mu}{(\nu L\chi - \mu)(1+L\chi+A^2L\chi)} > 0, \text{ et :}$$

$$\frac{dy}{dL} = \frac{\nu}{(\nu L\chi - \mu)(1+L\chi+A^2L\chi)} < 0.$$

Comme  $\mu > \nu$  (plus grande sensibilité des lobbies aux tromperies), alors :  $\frac{dx}{dL} > 0$ , et  $\frac{dy}{dL} < 0$ .

### 1.2.2 La sensibilité aux tromperies

**Du coté des lobbies**

$$* \frac{dy}{d\mu} = -\frac{-\nu L\lambda + \nu L + \nu w\lambda + Y\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)^2}$$

$$\frac{dy}{d\mu} = \frac{1}{\lambda\mu\chi - L\lambda\nu\chi^2} + \frac{L\lambda\nu\chi - Y\lambda\chi - \mu - w\lambda\nu\chi}{\lambda\mu^2\chi - 2L\lambda\mu\nu\chi^2 + L^2\lambda\nu^2\chi^3}$$

Comme  $\frac{1}{\lambda\mu\chi - L\lambda\nu\chi^2} > 0$ , puisque  $\mu > \nu$ , le signe de  $\frac{dy}{d\mu}$  peut dépendre du signe  $\frac{L\lambda\nu\chi - Y\lambda\chi - \mu - w\lambda\nu\chi}{\lambda\mu^2\chi - 2L\lambda\mu\nu\chi^2 + L^2\lambda\nu^2\chi^3}$ .

A partir de  $\mu = \chi\lambda \frac{-\nu L + \nu w + Y + L\chi\nu w + L\chi Y + A^2L\chi\nu w + A^2L\chi Y}{-1 + \chi\lambda L - L\chi + A^2L\chi\lambda - A^2L\chi}$ , on a :

$$\frac{L\lambda\nu\chi - Y\lambda\chi - \mu - w\lambda\nu\chi}{\lambda\mu^2\chi - 2L\lambda\mu\nu\chi^2 + L^2\lambda\nu^2\chi^3} =$$

$$(L\chi + A^2L\chi + 1)^{-2} (L\chi - L\lambda\chi + A^2L\chi - A^2L\lambda\chi + 1) (L\nu + Y\lambda - L\lambda\nu + w\lambda\nu)^{-1} (A^2 + 1) L\chi^{-1}$$

On étudie les signes relatifs de  $L\nu + Y\lambda - L\lambda\nu + w\lambda\nu$  et  $L\chi - L\lambda\chi + A^2L\chi - A^2L\lambda\chi + 1$ .

Si  $L\nu + Y\lambda - L\lambda\nu + w\lambda\nu > 0$ , alors :

$$L\nu + Y\lambda - L\lambda\nu + w\lambda\nu - B^2 = 0$$

$$\text{Solution : } \left\{ L = \frac{-B^2 + Y\lambda + \nu w\lambda}{\nu(\lambda - 1)} \right\}$$

Le second terme devient alors :

$$\begin{aligned} L\chi - L\lambda\chi + A^2L\chi - A^2L\lambda\chi + 1 &= -\frac{A^2\chi Y\lambda + A^2\chi\nu w\lambda + Y\lambda\chi + w\lambda\nu\chi - \chi B^2 - \nu - A^2\chi B^2}{\nu} \\ &= -\frac{A^2\chi Y\lambda + A^2\chi\nu w\lambda + Y\lambda\chi + w\lambda\nu\chi - \chi B^2 - A^2\chi B^2}{\nu} + 1 \\ &= -\chi(1 + A^2) \frac{-B^2 + Y\lambda + \nu w\lambda}{\nu} + 1 \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour que le second terme soit positif est que  $\chi$  soit faible.

Ce résultat signifie que le gouvernant tient compte de la sensibilité à la tromperie du lobby ( $\frac{dy}{d\mu} > 0$ ), si le lobby vérifie la condition olsonienne d'efficacité politique.

Interprétation complémentaire.

$$\frac{dy}{d\mu} = \frac{1}{\lambda\mu\chi - L\lambda\nu\chi^2} + \frac{L\lambda\nu\chi - Y\lambda\chi - \mu - w\lambda\nu\chi}{\lambda\mu^2\chi - 2L\lambda\mu\nu\chi^2 + L^2\lambda\nu^2\chi^3}$$

A partir de  $\lambda = -\mu \frac{1 + L\chi + A^2L\chi}{\chi(-\nu L + \nu w + Y - L\mu + L\chi\nu w + L\chi Y - A^2L\mu + A^2L\chi\nu w + A^2L\chi Y)}$ , on a :

$$\frac{L\lambda\nu\chi - Y\lambda\chi - \mu - w\lambda\nu\chi}{\lambda\mu^2\chi - 2L\lambda\mu\nu\chi^2 + L^2\lambda\nu^2\chi^3} = -(1 + A^2) \frac{L}{(-\nu L\chi + \mu)(1 + L\chi + A^2L\chi)}$$

Comme  $\lim_{L \rightarrow 0} -(1 + A^2) \frac{L}{(-\nu L\chi + \mu)(1 + L\chi + A^2L\chi)} \rightarrow 0$  pour  $L \rightarrow 0$ , cela signifie que  $\frac{dy}{d\mu}$  est d'autant plus positif que le politicien travaille peu pour la population (et est donc préoccupé de ses relations avec les lobbies, cf. les intérêts antagonistes).

**Du côté des électeurs**

$$*\frac{dx}{d\nu} = -L\chi \frac{w\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + LY\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)^2}$$

A partir de  $\lambda = -\mu \frac{1 + L\chi + A^2L\chi}{\chi(-\nu L + \nu w + Y - L\mu + L\chi\nu w + L\chi Y - A^2L\mu + A^2L\chi\nu w + A^2L\chi Y)}$ , on a :

$$\frac{dx}{d\nu} = -L\chi \frac{L\chi w + L A^2\chi w - L + w}{(-L\chi\nu + \mu)(1 + L\chi + A^2L\chi)}.$$

$$\frac{dx}{d\nu} > 0, \text{ sauf si } L \text{ tend vers zéro, ou plus précisément : si } L < \bar{L}, \text{ avec } \bar{L} = \frac{w}{1 - \chi w(1 + A^2)}.$$

Dans le cas contraire ( $\frac{dx}{d\nu} \leq 0$ ) cela signifie que le gouvernant travaille si peu pour la population que les caractéristiques de la population n'interfèrent même pas avec ses décisions.

On remarque que plus le gouvernant favorise les lobbies par rapport à la population et plus il est probable d'avoir  $\frac{dx}{d\nu} \leq 0$ .

Ainsi, comme  $\bar{L} = \frac{w}{1-\chi w(\frac{y}{x})}$ , plus l'écart sera grand entre  $y$  et  $x$ , plus  $\bar{L}$  élevé et plus  $\bar{L} < L$  sera probable. Cela signifie que moins on travaille pour la population par rapport aux lobbies et moins on intègre les caractéristiques de la population.<sup>1</sup>

### 1.2.3 Les sensibilités aux annonces

#### Concernant les électeurs

$$*\frac{dx}{dw} = L\nu \frac{\chi}{L\chi\nu - \mu} < 0$$

$$\frac{d\left(L\nu \frac{\chi}{L\chi\nu - \mu}\right)}{d\nu} = -\mu L \frac{\chi}{(-L\chi\nu + \mu)^2}$$

Il s'agit d'un résultat a priori paradoxal. Augmenter les annonces à l'électorat entraîne une baisse de la politique effectivement mise en oeuvre. L'explication réside dans la disjonction temporelle entre annonces et réalisation.  $\Delta^+w$  signifie une augmentation de l'importance du présent par rapport au futur. Donc une hausse de la tromperie future est assumée. Plutôt que d'essayer ensuite de la minorer il apparaît préférable de rechercher du soutien politique de la part des lobbies. On a en effet une amélioration des faveurs accordées aux lobbies :  $\frac{dy}{dw} = -\frac{\nu}{L\chi\nu - \mu} > 0$ . Cette situation provient directement de la moindre sensibilité des électeurs à la tromperie.

#### Concernant les lobbies

En termes de contributions, une hausse de la sensibilité des lobbies aux annonces entraîne une baisse des annonces ( $\frac{dz}{d\lambda} = -\frac{1}{\chi\lambda^2} < 0$ ). En effet la baisse de la sensibilité permet, à contributions égales, de diminuer les annonces. En conséquence, à tromperie constante, la politique mise en oeuvre en faveur des lobbies diminue.

On a donc:

$$*\frac{dy}{d\lambda} = \frac{\mu}{\chi\lambda^2(L\chi\nu - \mu)} < 0.$$

$y$  diminuant, il en va ainsi des DUPs, ce qui entraîne une augmentation de  $x$ .

---

<sup>1</sup>Quant à  $\frac{dx}{d\nu} < 0$  quand  $L < \bar{L}$ , l'interprétation peut être la suivante : le gouvernant a un comportement négatif vis-à-vis de la population ( $L$  et  $x$  faibles) et quand la population devient plus "revendicative" ( $\Delta^+\nu$ ) le comportement négatif s'accroît et donc  $x$  diminue encore.



On a donc:

$$*\frac{dx}{d\lambda} = -L\frac{\mu}{\lambda^2(L\chi\nu-\mu)} > 0.$$

#### 1.2.4 Les ressources

$$*\frac{dx}{dY} = L\frac{\chi}{L\chi\nu-\mu} < 0$$

$$*\frac{dy}{dY} = -\frac{1}{L\chi\nu-\mu} > 0$$

Plus on a de ressources et plus la redistribution profite aux lobbies.

## 2 L'analyse des tromperies

On a :  $x = L\frac{-\lambda\mu+\mu+\nu w\chi\lambda+Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu-\mu)}$ ;  $y = -\frac{\mu-\nu L\chi\lambda+\nu w\chi\lambda+Y\chi\lambda}{\chi\lambda(L\chi\nu-\mu)}$ ;  $z = \frac{1}{\chi\lambda}$ .

Soit  $T$  la tromperie vis-à-vis de l'électorat et  $\Upsilon$  la tromperie vis-à-vis des lobbies.

On a donc  $T = w - x$  et  $\Upsilon = z - y$ , soit:

$$T = -\frac{LY\chi\lambda+L\mu+w\mu\lambda-L\lambda\mu}{\lambda(L\chi\nu-\mu)};$$

et:

$$\Upsilon = \frac{L\nu-L\nu\lambda+\nu w\lambda+Y\lambda}{\lambda(L\chi\nu-\mu)}$$

### 2.1 Signe des tromperies

#### 2.1.1 Signe des tromperies (V1)

Les tromperies sont des valeurs positives. D'expérience, on sait que les promesses électorales sont supérieures aux réalisations. L'étude de  $T$  et  $\Upsilon$  le confirme (tant pour l'électorat que pour les lobbies). On peut montrer que si c'est le cas pour la population, il serait contradictoire qu'il n'en aille pas de même pour les lobbies.

Si on prend comme hypoyhèse que  $T = \frac{w\lambda\mu-L\lambda\mu+L\mu+LY\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu-\mu)} < 0$ , alors  $(w\lambda\mu - L\lambda\mu) + L\mu + LY\chi\lambda > 0$ .

Pour que cette expression ne soit pas négative, dans un cadre de croissance normale, il est nécessaire que  $w$  soit plus élevé que  $L$  (condition suffisante). Dans ce cas, le politicien travaillerait relativement peu pour la population, tout en lui promettant relativement beaucoup. Cela tendrait donc vers une tromperie positive, qui serait contraire à l'hypothèse de départ.

La même condition ( $L \gg w$ ) est valable pour  $\Upsilon = \frac{L\nu-L\nu\lambda+\nu w\lambda+Y\lambda}{\lambda(L\chi\nu-\mu)}$ .

### 2.1.2 Signe des tromperies (V2)

Les tromperies sont des valeurs positives. D'expérience, on sait que les promesses électorales sont supérieures aux réalisations. L'étude de  $T$  et  $\Upsilon$  le confirme (tant pour l'électorat que pour les lobbies). On peut montrer que si c'est le cas pour la population, il serait contradictoire qu'il n'en aille pas de même pour les lobbies.

Si on prend comme hypothèse que  $T = \frac{w\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + LY\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)} > 0$ , alors  $\lambda\mu(w - L) + L\mu + LY\chi\lambda < 0$ .

Dans un cadre de croissance normale, cette inégalité implique  $L > w$ .

A contrario (hypothèse opposée),  $L < w$  entraîne  $T < 0$  (condition suffisante). Mais dans ce cas, le politicien travaillerait relativement peu pour la population, tout en lui promettant relativement beaucoup. Cela tendrait donc vers une tromperie positive, qui serait contraire à l'hypothèse (opposée)  $T < 0$ .

La même condition ( $L > w$ ) est valable pour  $\Upsilon = \frac{L\nu - L\nu\lambda + \nu w\lambda + Y\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)}$ .

Remarque l'analyse des tromperie pourra se faire alternativement par la dérivation ou le calcul des élasticités.

## 2.2 La sensibilité des tromperies

### 2.2.1 Sensibilité des lobbies / $\chi$

$$* \frac{d\Upsilon}{d\chi} = \frac{1}{\lambda\mu^2 - 2L\lambda\mu\nu\chi + L^2\lambda\nu^2\chi^2} (L^2\lambda\nu^2 - Lw\lambda\nu^2 - L^2\nu^2 - LY\lambda\nu)$$

$$* \frac{d\Upsilon}{d\chi} \frac{\chi}{\Upsilon} = L\chi \frac{\nu}{-L\chi\nu + \mu}$$

$\frac{d\Upsilon}{d\chi} \frac{\chi}{\Upsilon} > 0$  signifie que la tromperie vis-à-vis des lobbies augmente quand ils deviennent moins efficaces.

### 2.2.2 Sensibilité des électeurs / $L$

$$* \frac{dT}{dL} = \frac{1}{\lambda\mu - L\lambda\nu\chi} (\mu - \lambda\mu + Y\lambda\chi) + \frac{L\mu\nu\chi - L\lambda\mu\nu\chi + w\lambda\mu\nu\chi + LY\lambda\nu\chi^2}{\lambda\mu^2 - 2L\lambda\mu\nu\chi + L^2\lambda\nu^2\chi^2}$$

$$* \frac{dT}{dL} \frac{L}{T} = -L\mu \frac{\lambda\mu - \mu - Y\chi\lambda - \nu w\chi\lambda}{(w\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + LY\chi\lambda)(-L\chi\nu + \mu)}$$

$$\text{Par } \lambda = -\mu \frac{1 + L\chi + A^2 L\chi}{\chi(-\nu L + \nu w + Y - L\mu + L\chi\nu w + L\chi Y - A^2 L\mu + A^2 L\chi\nu w + A^2 L\chi Y)},$$

$$\text{on a } \frac{\lambda\mu - \mu - Y\chi\lambda - \nu w\chi\lambda}{(w\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + LY\chi\lambda)} = \frac{1}{-L + w + L\chi w + A^2 L\chi w}.$$

$$\text{Le signe de } \frac{dT}{dL} \frac{L}{T} \text{ dépend donc de } \frac{1}{-L + w + L\chi w + A^2 L\chi w}.$$

$$\text{C'est-à-dire que } \frac{dT}{dL} \frac{L}{T} < 0 \text{ si } L > \bar{L}; \bar{L} = \frac{w}{1 - \chi w(1 + A^2)}.$$

Donc, comme précemment<sup>2</sup>, la relation entre hausse du travail et baisse de la tromperie ne vaut que si le gouvernement se préoccupe réellement de la population.

### 2.2.3 Sensibilité / $\mu$

$$* \frac{dT}{d\mu} = L\chi \frac{-w\lambda\nu + L\lambda\nu - \nu L - Y\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)^2}$$

Pas d'enseignements majeurs à tirer de ce résultat

$$(\text{et } \frac{dT}{d\mu} * \frac{\mu}{T} = -L\chi \frac{-w\lambda\nu + L\lambda\nu - \nu L - Y\lambda}{L\chi\nu - \mu} \frac{\mu}{w\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + LY\chi\lambda}).$$

$$\frac{dT}{d\mu} > 0 \text{ dès lors que } L > \lambda \frac{\nu w + Y}{\nu(\lambda - 1)}.$$

Interprétation : quand le gouvernant travaille beaucoup pour la population, une augmentation de la sensibilité des lobbies aux tromperies augmente la tromperie vis-à-vis des électeurs. Ainsi, l'augmentation de la sensibilité des lobbies à la tromperie fait qu'on les trompe moins (point suivant) et que la faible tromperie vis-à-vis des électeurs laisse une marge d'augmentation (phénomène de sunstitution).

Le seuil  $L = \lambda \frac{\nu w + Y}{\nu(\lambda - 1)}$  est d'ailleurs d'autant plus faible que  $w$  est bas, ce qui conforte l'idée d'une faible tromperie.

$$* \frac{dY}{d\mu} = - \frac{-L\nu - Y\lambda + L\lambda\nu - w\lambda\nu}{\lambda(-\mu + L\nu\chi)^2}$$

On calcule l'élasticité:

$$* \frac{dY}{d\mu} \frac{\mu}{Y} = \frac{\mu}{L\nu\chi - \mu} \rightarrow \frac{dY}{d\mu} \frac{\mu}{Y} < 0$$

Quand la sensibilité des lobbies à la tromperie augmente on les trompe moins.

### 2.2.4 Sensibilité / $\nu$

$$* \frac{dT}{d\nu} = -(-w\lambda\mu - YL\chi\lambda + L\lambda\mu - L\mu) L \frac{\chi}{\lambda(L\nu\chi - \mu)^2}$$

Le signe de  $\frac{dT}{d\nu}$  dépend du signe de  $(-w\lambda\mu - YL\chi\lambda + L\lambda\mu - L\mu)$ .

On a donc  $\frac{dT}{d\nu} < 0$  pour  $L > \bar{L}$  (cf. supra)<sup>3</sup> ce qui signifie que quand le gouvernant travaille un minimum pour la population il la trompe moins

---


$$^2 \bar{L} = \frac{w}{1 - \chi w(1 + A^2)}, \text{ pour } \frac{dx}{d\nu} > 0.$$

---

<sup>3</sup> A partir de  $Y = -\frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda - L\chi\lambda\mu + L\chi\mu + L\chi^2\nu w\lambda - A^2L\chi\lambda\mu + A^2L\chi\mu + A^2L\chi^2\nu w\lambda}{\chi\lambda(1 + L\chi + A^2L\chi)}$ , on a  $-w\lambda\mu - YL\chi\lambda + L\lambda\mu - L\mu = (L\chi + A^2L\chi + 1)^{-1} (L\nu\chi - \mu) (w - L + Lw\chi + A^2Lw\chi) \lambda$ , qui est positif si  $L > \frac{w}{1 - \chi w(1 + A^2)}$ .

quand elle devient plus sensible aux tromperies.

$$* \frac{dY}{d\nu} = \frac{-w\lambda\mu - YL\chi\lambda + L\lambda\mu - L\mu}{\lambda(L\nu\chi - \mu)^2}$$

La condition de signe est l'opposée de la précédente, c'est-à-dire que pour  $L > \bar{L}$ , on a  $\frac{dY}{d\nu} > 0$ , qui signifie que quand la sensibilité de l'électorat à la tromperie augmente on trompe davantage les lobbies (on retrouve ici l'aspect clairement antagoniste).

### 2.2.5 Sensibilité / $\lambda$

\*  $\frac{dT}{d\lambda} \frac{\lambda}{T} < 0$ , car :

$$\frac{dT}{d\lambda} = L \frac{\mu}{\lambda^2(-\mu + L\nu\chi)} < 0.$$

\*  $\frac{dY}{d\lambda} \frac{\lambda}{Y} > 0$ , car :

$$\frac{dY}{d\lambda} = -L \frac{\nu}{\lambda^2(L\nu\chi - \mu)} > 0.$$

Plus les lobbies sont sensibles aux annonces et plus on les trompe (maximisation des contributions) et moins on trompe l'électorat.

### 2.2.6 Sensibilité/ $w$

\*  $\frac{dT}{dw} \frac{w}{T} > 0$ , car :

$$\frac{dT}{dw} = -\frac{\mu}{L\nu\chi - \mu} > 0.$$

\*  $\frac{dY}{dw} \frac{w}{Y} < 0$ , car :

$$\frac{dY}{dw} = \frac{\nu}{L\nu\chi - \mu} < 0.$$

Plus les annonces à la population sont élevées et plus on la trompe et moins on trompe les lobbies.

### 2.2.7 Sensibilité / $Y$

\*  $\frac{dT}{dY} \frac{Y}{T} > 0$ , car :

$$\frac{dT}{dY} = -L \frac{\chi}{L\nu\chi - \mu} > 0.$$

\*  $\frac{dY}{dY} \frac{Y}{Y} < 0$ , car :

$$\frac{dY}{dY} = \frac{1}{L\nu\chi - \mu} < 0.$$

En cas d'amélioration de la croissance on trompe plus la population et moins les lobbies. Les lobbies sont les "gagnants" de la croissance. Par rapport à la ressource, on retrouve donc des intérêts clairement antagonistes entre la population et les lobbies.

Plus on annonce à la population une politique favorable et plus on la trompe, et moins on trompe les lobbies.

### 3 Vérification d'existence

Valeurs de  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

$x$ ,  $y$  et  $z$  sont compris entre 0 et 1. On peut donc écrire:

$$\begin{aligned}
 (1) & : L \frac{-\lambda\mu + \mu + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)} - |A| = 0 \\
 (2) & : L \frac{-\lambda\mu + \mu + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)} + |B| - 1 = 0 \\
 (3) & : -\frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\chi\lambda(L\chi\nu - \mu)} - |C| = 0 \\
 (2) & : -\frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\chi\lambda(L\chi\nu - \mu)} + |D| - 1 = 0 \\
 (1) & : \frac{1}{\chi\lambda} - |E| = 0 \\
 (3) & : \frac{1}{\chi\lambda} + |F| - 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$|A| + |B| - 1 = 0$$

$$|C| + |D| - 1 = 0$$

$$|E| + |F| - 1 = 0$$

Ce système regroupe les différentes contraintes techniques sur les variables, à savoir que  $x$ ,  $y$  et  $z$  doivent être compris entre 0 et 1.

Il faut donc démontrer que le système admet des solutions.

On égalise deux à deux les 6 premières équations.

$$\begin{aligned}
 & L \frac{-\lambda\mu + \mu + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)} - |A| - \left( \frac{1}{\chi\lambda} - |E| \right) = \\
 & \frac{-L\chi\lambda\mu + L\chi\mu + L\chi^2\nu w\lambda + L\chi^2Y\lambda - |A|\lambda\chi^2L\nu + |A|\lambda\chi\mu - L\chi\nu + \mu + |E|\lambda\chi^2L\nu - |E|\lambda\chi\mu}{\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi} \\
 & L \frac{-\lambda\mu + \mu + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)} + |B| - 1 - \left( -\frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\chi\lambda(L\chi\nu - \mu)} + |D| - 1 \right) = \\
 & \frac{-L\chi\lambda\mu + L\chi\mu + L\chi^2\nu w\lambda + L\chi^2Y\lambda + |B|\lambda\chi^2L\nu - |B|\lambda\chi\mu + \mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda - |D|\lambda\chi^2L\nu + |D|\lambda\chi\mu}{\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi} \\
 & -\frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\chi\lambda(L\chi\nu - \mu)} - |C| - \left( \frac{1}{\chi\lambda} + |F| - 1 \right) = \\
 & -\frac{-L\nu\lambda + \nu w\lambda + Y\lambda + |C|\lambda L\chi\nu - |C|\lambda\mu + L\nu + |F|\lambda L\chi\nu - |F|\lambda\mu - \nu L\chi\lambda + \lambda\mu}{\lambda(L\chi\nu - \mu)}
 \end{aligned}$$

On cherche les valeurs de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .

A partir de :

$$\frac{-L\chi\lambda\mu+L\chi\mu+L\chi^2\nu w\lambda+L\chi^2Y\lambda-|A|\lambda\chi^2L\nu+|A|\lambda\chi\mu-L\chi\nu+\mu+|E|\lambda\chi^2L\nu-|E|\lambda\chi\mu}{\lambda(L\chi\nu-\mu)\chi}$$

On a :

$$\left\{ A = \frac{-L\chi\lambda\mu+L\chi\mu+L\chi^2\nu w\lambda+L\chi^2Y\lambda-L\chi\nu+\mu+|E|\lambda\chi^2L\nu-|E|\lambda\chi\mu}{\lambda(L\chi\nu-\mu)\chi} \right\}.$$

A partir de :

$$\frac{-L\chi\lambda\mu+L\chi\mu+L\chi^2\nu w\lambda+L\chi^2Y\lambda+|B|\lambda\chi^2L\nu-|B|\lambda\chi\mu+\mu-\nu L\chi\lambda+\nu w\chi\lambda+Y\chi\lambda-|D|\lambda\chi^2L\nu+|D|\lambda\chi\mu}{\lambda(L\chi\nu-\mu)\chi}$$

On a :

$$\left\{ B = \frac{-L\chi\lambda\mu+L\chi\mu+L\chi^2\nu w\lambda+L\chi^2Y\lambda+\mu-\nu L\chi\lambda+\nu w\chi\lambda+Y\chi\lambda-|D|\lambda\chi^2L\nu+|D|\lambda\chi\mu}{\lambda(L\chi\nu-\mu)\chi} \right\}.$$

A partir de :

$$\frac{-\lambda L\nu+\nu w\lambda+Y\lambda+|C|\lambda L\chi\nu-|C|\lambda\mu+\nu L+|F|\lambda L\chi\nu-|F|\lambda\mu-\nu L\chi\lambda+\lambda\mu}{\lambda(L\chi\nu-\mu)}$$

On a :

$$\left\{ C = -\frac{-\lambda L\nu+\nu w\lambda+Y\lambda+\nu L+|F|\lambda L\chi\nu-|F|\lambda\mu-\nu L\chi\lambda+\lambda\mu}{(L\chi\nu-\mu)\lambda} \right\},$$

$$\left\{ C = \frac{-\lambda L\nu+\nu w\lambda+Y\lambda+\nu L+|F|\lambda L\chi\nu-|F|\lambda\mu-\nu L\chi\lambda+\lambda\mu}{(L\chi\nu-\mu)\lambda} \right\}.$$

On réintroduit ces valeurs dans les trois dernières équations du système.

$$|A| + |B| - 1 = \left| \frac{-L\chi\lambda\mu+L\chi\mu+L\chi^2\nu w\lambda+L\chi^2Y\lambda-L\chi\nu+\mu+|E|\lambda\chi^2L\nu-|E|\lambda\chi\mu}{\lambda(L\chi\nu-\mu)\chi} \right| +$$

$$\left| \frac{-L\chi\lambda\mu+L\chi\mu+L\chi^2\nu w\lambda+L\chi^2Y\lambda+\mu-\nu L\chi\lambda+\nu w\chi\lambda+Y\chi\lambda-|D|\lambda\chi^2L\nu+|D|\lambda\chi\mu}{\lambda(L\chi\nu-\mu)\chi} \right| - 1 =$$

$$(|-L\chi\lambda\mu + L\chi\mu + L\chi^2\nu w\lambda + L\chi^2Y\lambda - L\chi\nu + \mu + |E|\lambda\chi^2L\nu - |E|\lambda\chi\mu|$$

$$+ |-L\chi\lambda\mu + L\chi\mu + L\chi^2\nu w\lambda + L\chi^2Y\lambda + \mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda -$$

$$|D|\lambda\chi^2L\nu + |D|\lambda\chi\mu| - |\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi|) \left| \frac{1}{(L\chi\nu-\mu)\lambda\chi} \right| = 0.$$

On regroupe les deux dernières équations.

$$|C| + |D| - 1 = 0,$$

$$|E| + |F| - 1 = 0.$$

$$\text{Entraîne : } |C| + |D| - |E| - |F| = 0.$$

$$\text{Solution : } \{|E| = |C| + |D| - |F|\}.$$

$$\text{On réintroduit } C = \frac{-\lambda L\nu+\nu w\lambda+Y\lambda+\nu L+|F|\lambda L\chi\nu-|F|\lambda\mu-\nu L\chi\lambda+\lambda\mu}{(L\chi\nu-\mu)\lambda} \text{ dans } |E| = |C| +$$

$$|D| - |F|.$$

$$|E| = \left| \frac{-\lambda L\nu+\nu w\lambda+Y\lambda+\nu L+|F|\lambda L\chi\nu-|F|\lambda\mu-\nu L\chi\lambda+\lambda\mu}{\lambda(L\chi\nu-\mu)} \right| + |D| - |F|.$$

$$\text{Solution : } \left\{ E = \left| \frac{-\lambda L\nu+\nu w\lambda+Y\lambda+\nu L+|F|\lambda L\chi\nu-|F|\lambda\mu-\nu L\chi\lambda+\lambda\mu}{\lambda(L\chi\nu-\mu)} \right| + |D| - |F| \right\},$$

$$\left\{ E = - \left| \frac{-\lambda L\nu+\nu w\lambda+Y\lambda+\nu L+|F|\lambda L\chi\nu-|F|\lambda\mu-\nu L\chi\lambda+\lambda\mu}{\lambda(L\chi\nu-\mu)} \right| - |D| + |F| \right\}.$$

On réintroduit E dans :

$$(|-L\chi\lambda\mu + L\chi\mu + L\chi^2\nu w\lambda + L\chi^2Y\lambda - L\chi\nu + \mu + |E|\lambda\chi^2L\nu - |E|\lambda\chi\mu|$$

$$+ |-L\chi\lambda\mu + L\chi\mu + L\chi^2\nu w\lambda + L\chi^2Y\lambda + \mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda -$$

$$\begin{aligned}
& |D| \lambda \chi^2 L \nu + |D| \lambda \chi \mu - |\lambda (L \chi \nu - \mu) \chi| \left| \frac{1}{(L \chi \nu - \mu) \lambda \chi} \right| \\
&= \left| \frac{L \chi^2 \nu w \lambda + L \nu \chi^2 D \lambda - L \chi^2 \nu \lambda - \nu L \chi \lambda + L \chi^2 Y \lambda - L \chi \lambda \mu + L \chi \mu + \nu w \chi \lambda + \chi \mu \lambda + Y \chi \lambda - \chi D \lambda \mu + \mu}{\lambda (L \chi \nu - \mu) \chi} \right| + \\
&\left| \frac{-L \chi \lambda \mu + L \chi \mu + L \chi^2 \nu w \lambda + L \chi^2 Y \lambda + \mu - \nu L \chi \lambda + \nu w \chi \lambda + Y \chi \lambda - L \nu \chi^2 D \lambda + \chi D \lambda \mu}{\lambda (L \chi \nu - \mu) \chi} \right| - 1.
\end{aligned}$$

On considère des valeurs positives pour les valeurs absolues (ce qui signifie que A, B, C, D, E et F sont  $> 0$ ).

On a donc:

$$\begin{aligned}
& \frac{L \chi^2 \nu w \lambda + L \nu \chi^2 D \lambda - L \chi^2 \nu \lambda - \nu L \chi \lambda + L \chi^2 Y \lambda - L \chi \lambda \mu + L \chi \mu + \nu w \chi \lambda + \chi \mu \lambda + Y \chi \lambda - \chi D \lambda \mu + \mu}{\lambda (L \chi \nu - \mu) \chi} + \\
& \frac{-L \chi \lambda \mu + L \chi \mu + L \chi^2 \nu w \lambda + L \chi^2 Y \lambda + \mu - \nu L \chi \lambda + \nu w \chi \lambda + Y \chi \lambda - L \nu \chi^2 D \lambda + \chi D \lambda \mu}{\lambda (L \chi \nu - \mu) \chi} - 1 = 0,
\end{aligned}$$

qui entraîne :

$$2 \frac{L \chi^2 \nu w \lambda - L \chi^2 \nu \lambda - \nu L \chi \lambda + L \chi^2 Y \lambda - L \chi \lambda \mu + L \chi \mu + \nu w \chi \lambda + \chi \mu \lambda + Y \chi \lambda + \mu}{\lambda (L \chi \nu - \mu) \chi} = 0.$$

$$\text{Solution : } \left\{ \nu = -\frac{L \chi^2 Y \lambda - L \chi \lambda \mu + L \chi \mu + \chi \mu \lambda + Y \chi \lambda + \mu}{\chi \lambda (L \chi w - L + w - L \chi)}, \mu = \mu, \lambda = \lambda \right\}$$

Le système de départ admet donc au moins une solution.

## 4 Autre démonstration d'existence

$$\begin{aligned}
(1) & : L \frac{-\lambda \mu + \mu + \nu w \chi \lambda + Y \chi \lambda}{\lambda (L \chi \nu - \mu)} - |A| = 0 \\
(2) & : L \frac{-\lambda \mu + \mu + \nu w \chi \lambda + Y \chi \lambda}{\lambda (L \chi \nu - \mu)} + |B| - 1 = 0 \\
(3) & : -\frac{\mu - \nu L \chi \lambda + \nu w \chi \lambda + Y \chi \lambda}{\chi \lambda (L \chi \nu - \mu)} - |C| = 0 \\
(2) & : -\frac{\mu - \nu L \chi \lambda + \nu w \chi \lambda + Y \chi \lambda}{\chi \lambda (L \chi \nu - \mu)} + |D| - 1 = 0 \\
(1) & : \frac{1}{\chi \lambda} - |E| = 0 \\
(3) & : \frac{1}{\chi \lambda} + |F| - 1 = 0
\end{aligned}$$

$$|A| + |B| - 1 = 0$$

$$|C| + |D| - 1 = 0$$

$$|E| + |F| - 1 = 0$$

On ne considère que les numérateurs, après simplification des expressions du système.

$$\begin{aligned}
& -L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda - |A| \lambda L\chi\nu + |A| \lambda\mu = 0 \\
& -L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda + |B| \lambda L\chi\nu - |B| \lambda\mu - \nu L\chi\lambda + \lambda\mu = 0 \\
& \quad - (\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda + |C| \lambda\chi^2 L\nu - |C| \lambda\chi\mu) = 0 \\
& -(\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda - |D| \lambda\chi^2 L\nu + |D| \lambda\chi\mu + L\chi^2 \nu\lambda - \chi\mu\lambda = 0 \\
& \quad - (-1 + |E| \chi\lambda) = 0 \\
& \quad 1 + |F| \chi\lambda - \chi\lambda = 0 \\
& \quad |A| + |B| - 1 = 0 \\
& \quad |C| + |D| - 1 = 0 \\
& \quad |E| + |F| - 1 = 0
\end{aligned}$$

Equation 1 :

$$-L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda - |A| \lambda L\chi\nu + |A| \lambda\mu$$

Equation 2 :

on exprime B en fonction de A,  $\{B = -|A| + 1\}$ :

$$\begin{aligned}
& -L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda + |B| \lambda L\chi\nu - |B| \lambda\mu - \nu L\chi\lambda + \lambda\mu = \\
& -L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda + \nu L\chi\lambda |A - 1| - \lambda\mu |A - 1| - \nu L\chi\lambda + \lambda\mu
\end{aligned}$$

Equation 3 :

$$- (\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda + |C| \lambda\chi^2 L\nu - |C| \lambda\chi\mu)$$

Equation 4 :

On exprime D en fonction de C,  $\{D = -|C| + 1\}$ :

$$\begin{aligned}
& -(\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda - |D| \lambda\chi^2 L\nu + |D| \lambda\chi\mu + L\chi^2 \nu\lambda - \chi\mu\lambda) = \\
& -\mu + \nu L\chi\lambda - \nu w\chi\lambda - Y\chi\lambda + L\chi^2 \nu\lambda |C - 1| - \chi\mu\lambda |C - 1| - L\chi^2 \nu\lambda + \chi\mu\lambda
\end{aligned}$$

Equation 5 :

$$- (-1 + |E| \chi\lambda)$$

Equation 6 :

On exprime F en fonction de E,  $\{F = -|E| + 1\}$  :

$$1 + |F| \chi\lambda - \chi\lambda = 1 + \chi\lambda |E - 1| - \chi\lambda$$

On a donc un système de six équations (égales à 0) :



$$\begin{aligned}
& -L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda - |A| \lambda L\chi\nu + |A| \lambda\mu \\
& -L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda + \nu L\chi\lambda |A-1| - \lambda\mu |A-1| - \nu L\chi\lambda + \lambda\mu \\
& - (\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda + |C| \lambda\chi^2 L\nu - |C| \lambda\chi\mu) \\
& - \mu + \nu L\chi\lambda - \nu w\chi\lambda - Y\chi\lambda + L\chi^2 \nu\lambda |C-1| - \chi\mu\lambda |C-1| - L\chi^2 \nu\lambda + \chi\mu\lambda \\
& - (-1 + |E| \chi\lambda) \\
& 1 + \chi\lambda |E-1| - \chi\lambda
\end{aligned}$$

On considère les deux dernières équations:

$$\begin{aligned}
& -(-1 + |E| \chi\lambda) \\
& 1 + \chi\lambda |E-1| - \chi\lambda
\end{aligned}$$

$$1 + \chi\lambda |E-1| - \chi\lambda = 0$$

Solution :  $\left\{ E = \frac{2\chi\lambda-1}{\chi\lambda} \right\}, \left\{ E = \frac{1}{\chi\lambda} \right\}$

Si on considère :  $E = \frac{1}{\chi\lambda}$

$$-(-1 + |E| \chi\lambda) = 1 - \left| \frac{1}{\chi\lambda} \right| \chi\lambda = 0$$

Toujours vrai, on reprend donc:

$$\begin{aligned}
(1) & -L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda - |A| \lambda L\chi\nu + |A| \lambda\mu \\
(2) & -L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda + \nu L\chi\lambda |A-1| \\
& - \lambda\mu |A-1| - \nu L\chi\lambda + \lambda\mu \\
(3) & -(\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda + |C| \lambda\chi^2 L\nu - |C| \lambda\chi\mu) \\
(4) & -\mu + \nu L\chi\lambda - \nu w\chi\lambda - Y\chi\lambda + L\chi^2 \nu\lambda |C-1| \\
& - \chi\mu\lambda |C-1| - L\chi^2 \nu\lambda + \chi\mu\lambda
\end{aligned}$$

A partir de l'équation 4 :

$$-\mu + \nu L\chi\lambda - \nu w\chi\lambda - Y\chi\lambda + L\chi^2 \nu\lambda |C-1| - \chi\mu\lambda |C-1| - L\chi^2 \nu\lambda + \chi\mu\lambda,$$

Solution is:

$$\begin{aligned}
& \left\{ C = \frac{2L\chi^2 \nu\lambda - 2\chi\mu\lambda + \mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi} \right\}, \\
& \left\{ C = -\frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi} \right\}.
\end{aligned}$$

On considère  $C = -\frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi}$ , qu'on réintroduit dans (3) :

$$-(\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda + |C| \lambda\chi^2 L\nu - |C| \lambda\chi\mu)$$

$$= -\mu + \nu L\chi\lambda - \nu w\chi\lambda - Y\chi\lambda - \left| \frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi} \right| \lambda\chi^2 L\nu$$

$$+ \left| \frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi} \right| \lambda\chi\mu$$

A partir de l'équation 2 :

$$-L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda + \nu L\chi\lambda |A - 1| - \lambda\mu |A - 1| - \nu L\chi\lambda + \lambda\mu,$$

Solution :

$$\left\{ A = -\frac{-2\nu L\chi\lambda + 2\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)} \right\},$$

$$\left\{ A = L\frac{-\lambda\mu + \mu + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)} \right\}$$

On considère  $A = -\frac{-2\nu L\chi\lambda + 2\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)}$ , qu'on réintroduit dans (1) :

$$-L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda - |A| \lambda L\chi\nu + |A| \lambda\mu$$

$$= -L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda - \left| \frac{-2\nu L\chi\lambda + 2\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)} \right| \lambda L\chi\nu$$

$$+ \left| \frac{-2\nu L\chi\lambda + 2\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)} \right| \lambda\mu.$$

On a donc un système qui se réduit à deux équations (égales à 0):

$$(1) \quad -\mu + \nu L\chi\lambda - \nu w\chi\lambda - Y\chi\lambda - \left| \frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi} \right| \lambda\chi^2 L\nu +$$

$$\left| \frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi} \right| \lambda\chi\mu$$

$$(2) \quad -L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda$$

$$- \frac{|-2\nu L\chi\lambda + 2\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda|}{|\lambda| |L\chi\nu - \mu|} \lambda L\chi\nu$$

$$+ \frac{|-2\nu L\chi\lambda + 2\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda|}{|\lambda| |L\chi\nu - \mu|} \lambda\mu$$

A partir de la première équation :

$$-\mu + \nu L\chi\lambda - \nu w\chi\lambda - Y\chi\lambda - \left| \frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi} \right| \lambda\chi^2 L\nu$$

$$+ \left| \frac{\mu - \nu L\chi\lambda + \nu w\chi\lambda + Y\chi\lambda}{\lambda(L\chi\nu - \mu)\chi} \right| \lambda\chi\mu,$$

Solution :  $\left\{ \lambda = -\frac{\mu}{\chi(-\nu L + \nu w + Y)} \right\}$ , qu'on réintroduit dans la seconde équation :

$$-L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda - \frac{|-2\nu L\chi\lambda + 2\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda|}{|\lambda| |L\chi\nu - \mu|} \lambda L\chi\nu$$

$$+ \frac{|-2\nu L\chi\lambda + 2\lambda\mu - L\lambda\mu + L\mu + L\nu w\chi\lambda + LY\chi\lambda|}{|\lambda| |L\chi\nu - \mu|} \lambda\mu$$

$$= \frac{L\mu^2 - \nu L^2 \chi\mu + \nu L\mu | -2 + L | \chi - | -2 + L | \chi \nu L + | -2 + L | \chi \nu w + | -2 + L | \chi Y}{\chi(-\nu L + \nu w + Y)}.$$

$$\frac{L\mu^2 - \nu L^2 \chi \mu + \nu L \mu | - 2 + L | \chi - | - 2 + L | \chi \nu L + | - 2 + L | \chi \nu w + | - 2 + L | \chi Y}{\chi(-\nu L + \nu w + Y)} = 0$$

$$\text{a pour solution : } \left\{ \nu = -\frac{L\mu^2 + | - 2 + L | \chi Y}{\chi(-L^2 \mu + L \mu | - 2 + L | - L | - 2 + L | + w | - 2 + L |)}, \mu = \mu \right\}$$

Remarque : le choix de certaines valeurs intermédiaire dans la résolution se justifie par le fait que la résolution ne vise pas la détermination de valeurs précises mais doit apporter la preuve d'absence d'impossibilité (c'est-à-dire des valeurs de départ non comprises entre 0 et 1).